DEUTSCHE
GESELLSCHAFT FÜR
ZERSTÖRUNGSFREIE
PRÜFUNG E.V.

ZfP-Sonderpreis der DGZfP beim Regionalwettbewerb Jugend forscht

BITBURG

Sternenmathemagie

Max Graf

Leonard Preisler

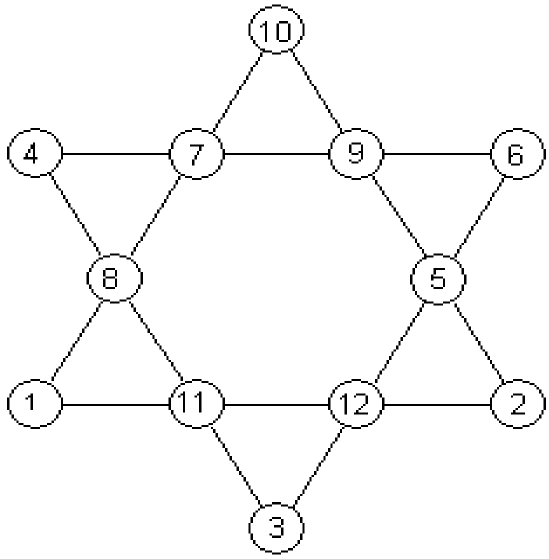
Schule:
Peter-Wurst-Gymnasium
Koblenzer Str. 56
54516 Wittlich

Jugend forscht 2011

1. Ein mathematisches Geburtstagsgeschenk

Onkel Werner liebt Geburtstagsrätsel. Vor zwei Jahren musste er bereits Versuchskaninchen spielen, als wir zahlreiche Geburtstagsrätsel für unsere Arbeit „Hellsehen mit Zahlen“ (Schüler experimentieren) erstellt hatten.

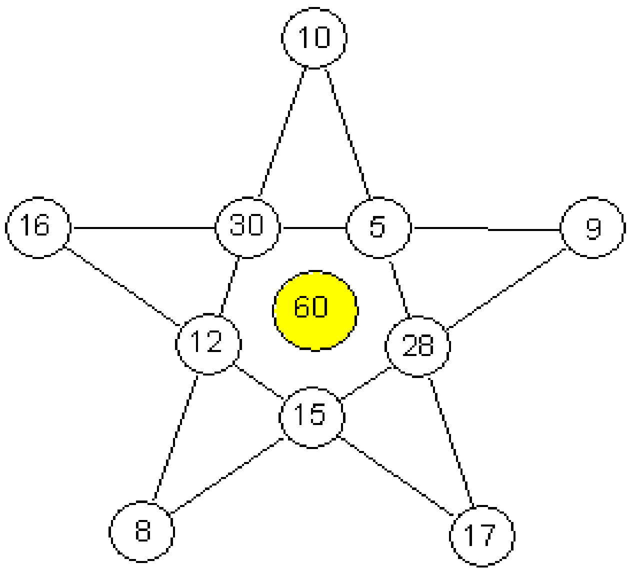
In diesem Jahr wurde Onkel Werner 60 Jahre alt. Deswegen wollten wir uns etwas ganz Besonderes einfallen lassen. (Werner ist der Onkel von Max, der aber auch Leonard gut kennt.) In dem Knobelbuch von Perelmann (Lit.verz. [1]), aus dem wir auch schon Ideen für die „Hellsehertricks“ gewonnen hatten, fanden wir einen „***magischen Zahlenstern***“, der so aussah:



Perelmann-stern

Magische Konstante: 26

Mit etwas Ähnlichem wollten wir Onkel Werner gerne überraschen. Da ein fünfzackiger Stern angeblich besonders viel Glück bringt, sollte der Geburtstagsstern fünfzackig sein und die **magische Konstante 60** haben. Nach sehr langem Nachdenken haben wir folgenden Stern für Onkel Werner entworfen:



Onkel Werners Stern hat sehr schöne Eigenschaften, und zwar folgende:

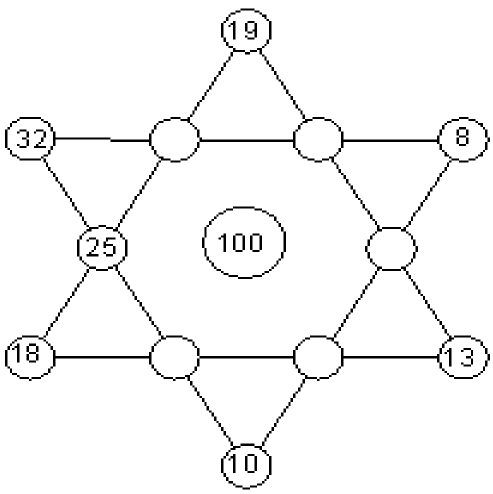
10+30+12+8 = 60
16+12+15+17 = 60
8+15+28+9 = 60
10+5+28+17 = 60
9+5+30+16 = 60

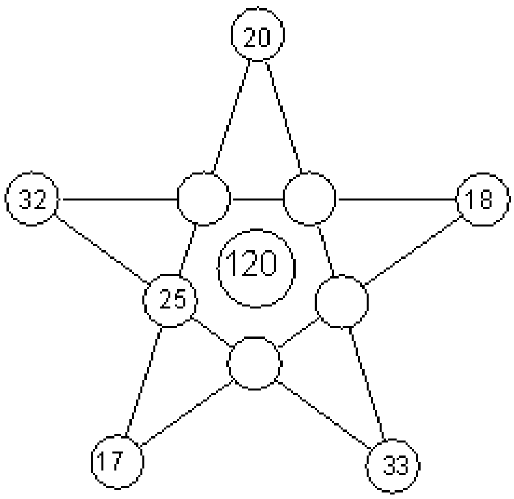
Das bedeutet: Die **Summe der Zahlen hat für jede der fünf Sternenseiten** den Wert **60**.
Aber nicht allein nur das. Außerdem ist auch **10+16+8+17+9 = 60**.
Das heißt: Die **Summe der Zahlen in den fünf Sternspitzen** ergibt auch Onkel Werners magische Zahl **60**.

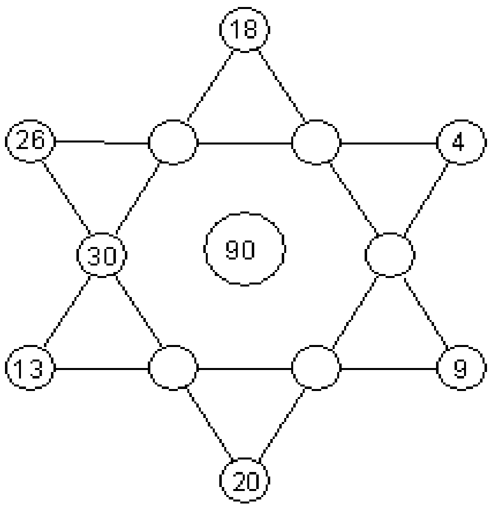
Es war gar nicht so einfach, diesen Stern zu finden. Wenn man den fertigen Stern sieht, kann man die viele Arbeit, die dahinter steckt, vielleicht gar nicht erkennen.

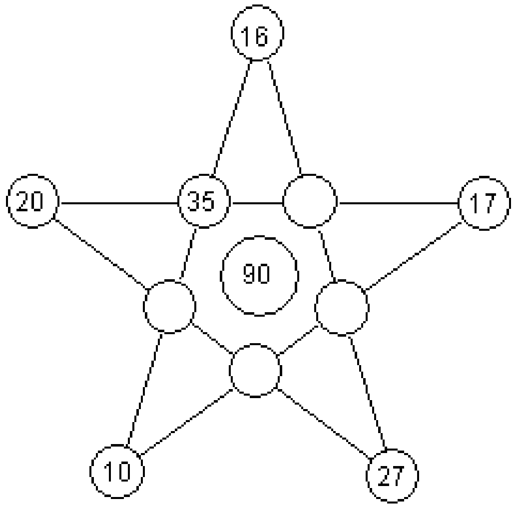
Darum bitten wir nun Sie, die verehrte Leserin/den verehrten Leser, die folgenden unvollständigen Objekte so zu ergänzen, dass es jeweils magische Sterne werden.
Die Summen der Zahlen in den Spitzen haben bereits den Wert der „magischen Konstanten“, die jeweils ganz in der Mitte stehen.
Es sind nur noch die Zahlen im Sterneninneren so zu besetzen, dass auch **für alle Sternenseiten** die **magische Summe** (die Zahl ganz in der Mitte) herauskommt.

Bitte nehmen Sie sich für diese Aufgaben aber nicht mehr als 10 Minuten Zeit!









Um zu überprüfen, ob Ihre Lösungen richtig sind, sollten Sie so verfahren:

1. Sie nehmen die **letzte** Zahl, welche Sie berechnet haben, und **testen diese** Zahl in derjenigen Sternenseite, die Sie noch **nicht** zur Berechnung benutzt haben.

2. Sie vergleichen ihre Ergebnisse mit den „Musterlösungen“ im Anhang (S. 15, hinter den Quellenangaben).

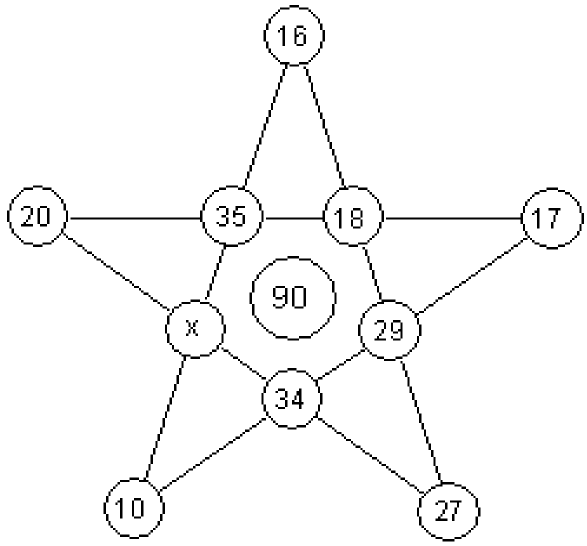
Haben Sie ein solches Ergebnis erwartet?

Auf jeden Fall ergeben sich aus Ihren Lösungsversuchen sehr viele Fragen, die wir im Verlaufe dieser Arbeit alle klären werden.

Eine Bitte haben wir: Erst **nachdem** Sie Ihre Lösungen (und Unklarheiten) **aller vier** Aufgabenstellungen **analysiert** haben, sollten Sie weiter lesen.

2. Die Methode der durchschnittlichen Bereinigung

Ihr Versuch, den vierten Stern (den fünfzackigen mit der magischen Konstanten 90) zu ergänzen, könnte so ausgesehen haben:



Wenn man sich fragt, welche Zahl x in das letzte, freie Feld zu schreiben ist, rechnet man
90 – 27 – 34 – 20 und erhält **x = 9.**

Aus der anderen Sternenseite ergibt sich allerdings: **x = 90 – 16 – 35 – 10 = 29.**

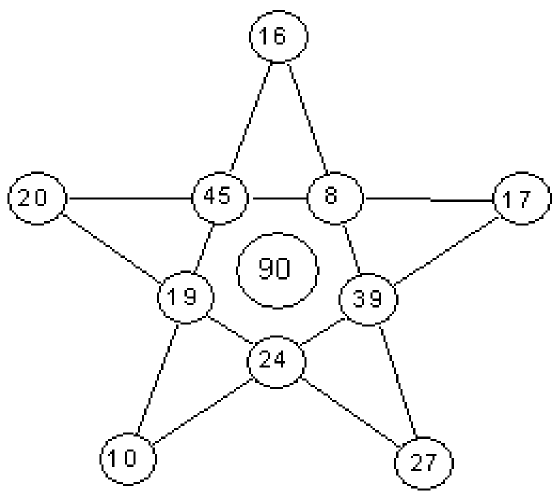
Was ist nun richtig? Natürlich **keines** dieser beiden möglichen Ergebnisse!

Wenn wir einmal wie ein Schiedsrichter entscheiden, könnten wir ja versuchen, für x den **Mittelwert** der beiden Zahlen zu nehmen. Dies ist: (9+29) : 2 =19

Natürlich müssen dann die vier anderen Zahlen im Sterneninneren neu berechnet werden, damit die magische Konstante überall 90 ergibt.

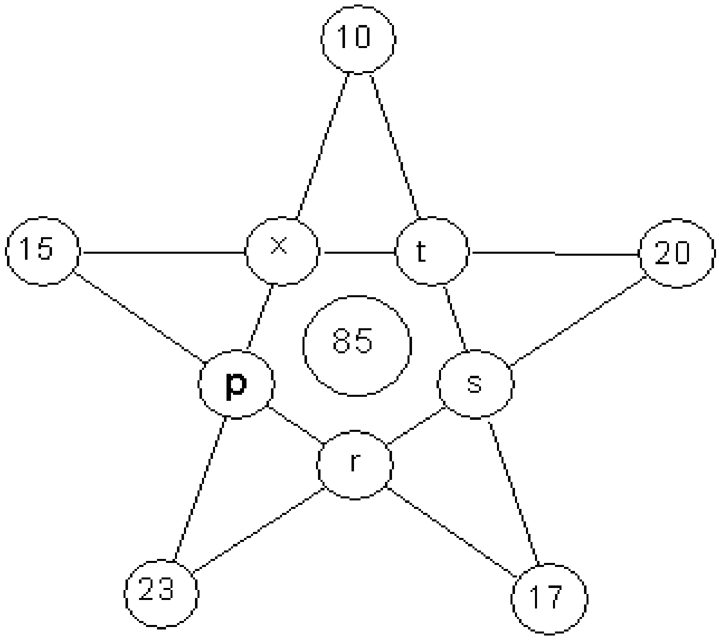
Es war also auf keinen Fall möglich, den vorgegebenen Stern richtig zu ergänzen, weil die vorgegebene Zahl 35 im Sterneninneren zu widersprüchlichen Ergebnissen führte.
Allerdings lässt sich die falsche Lösung „bereinigen“, indem man von den beiden verschiedenen Ergebnissen von x den Mittelwert errechnet und alle anderen Zahlen im Sterneninneren anpasst.
Ist z.B. die Differenz der letzten beiden Ergebnisse 20, dann werden durch diese Vorgehensweise die anderen Zahlen im Sterneninneren abwechselnd um 10 kleiner bzw. größer gemacht. Statt 35 hätte 45 stehen müssen.

Damit ist der Stern „noch zu retten“. Und so sieht er dann aus:



3. Keine Startschwierigkeiten mehr mit der richtigen Formel

Unsere ersten magischen Sterne haben wir mit dieser „Bereinigungsmethode“ gefunden. Da uns dies nach einiger Zeit zu umständlich war, überlegten wir, ob man die **richtige** Startzahl nicht **sofort** mit einer Formel finden könnte.
Wir begannen mit einem Stern zur magischen Konstanten 85, bei dem wir zuerst nur die Spitzen vorgaben**.** Die erste „richtige“ Zahl im Sterneninneren nannten wir vorläufig x und die anderen vier Zahlen p, r, s und t.



Nun nahmen wir an, wir würden x schon kennen, und rechneten p, r, s und t aus:

p = 85 – 10 – 23 – x = 52 – x

r = 85 – 15 – 17 – p = 53 – (52 – x) = 1+ x

s = 85 – 23 – 20 – r = 42 – r = 42 – (1 + x) = 41 – x

t = 85 – 17 –10 – s = 58 – s = 58 – (41 – x) = 17 + x

Und nun kontrollierten wir die fünfte Sternenseite:

x = 85 – 20 –15 – t = 50 – t = 50 – (17 + x) = 33 – x

Hieraus ergibt sich:

x = 33 – x

2x = 33

Damit erhalten wir x und alle anderen Zahlen:

x = 16,5   p = 35,5   r = 17,5   s = 24,5   t = 33,5

Es funktioniert! Wir konnten jetzt **sofort** die **richtige Startzahl** im Sternen**inneren** errechnen!

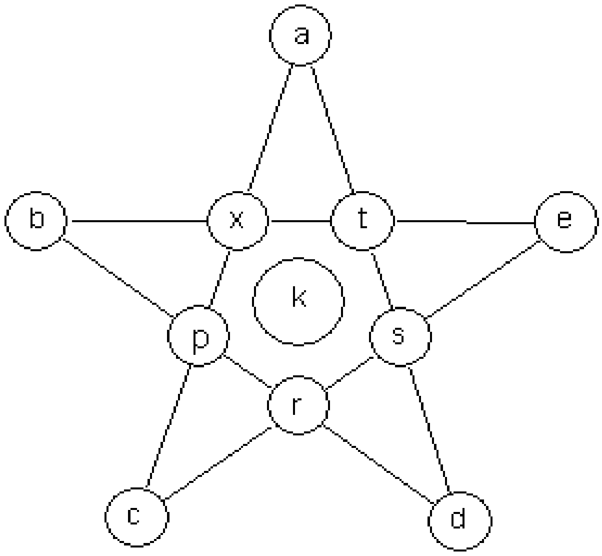
Aber eines hat uns doch noch nicht so gut gefallen:

Im Sterneninneren treten ausschließlich Dezimalzahlen auf.

Ganze Zahlen wären natürlich sehr viel schöner!

Um herauszufinden, wieso wir Dezimalzahlen bekommen haben, haben wir zunächst alle „Kenndaten" des magischen fünfzackigen Sterns nur durch Buchstaben beschrieben, auch die magische Konstante k.
Wir haben uns nun vorgestellt, dass wir a, b, c, d und e schon kennen, so dass die magische Konstante $k = a + b + c + d + e$ lautet.

Man kann auch a, b, c, d und k vorgeben und dann e errechnen ($e = k – a – b – c – d$).
Außerdem gehen wir davon aus, dass uns die **Zahl bekannt** ist, die für x eingesetzt werden muss.



$p = k – a – c – x$

$r = k – b – d – p = k – b – d – (k – a – c – x) = a + c – b – d + x$

$s = k – c – e – r = k – c – e – (a + c – b – d + x) = k – 2c – e – a + b + d – x$

$t = k – a – d – s = k – a – d – (k – 2c – e – a + b + d – x) = - 2d + 2c + e – b + x$

$x = k – b – e – t = k – b – e – (-2d + 2c + e – b + x) = k – 2e + 2d – 2c – x$

$2x = k – 2e + 2d – 2c$

Ergebnis: $x = 0{,}5k – e + d – c$

Diese Gleichung löst viele Probleme. Wir hätten mit einer magischen Konstanten **k**, die **ungerade** ist, überhaupt **keine Chance** gehabt, einen **ganzzahligen Stern** zu finden, da **k durch 2 dividiert** wird.

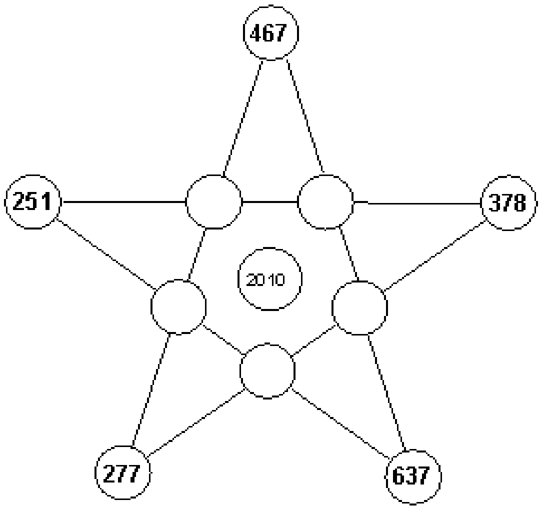
Außerdem wissen wir jetzt, wie die erste Zahl im Sterneninneren heißen muss, so dass wir sie mit dem folgenden Verfahren berechnen können:

Wir addieren zur halbierten magischen Konstanten die Zahl auf der gegenüberliegenden Sternspitze und subtrahieren die beiden Zahlen der daran angrenzenden Sternspitzen.

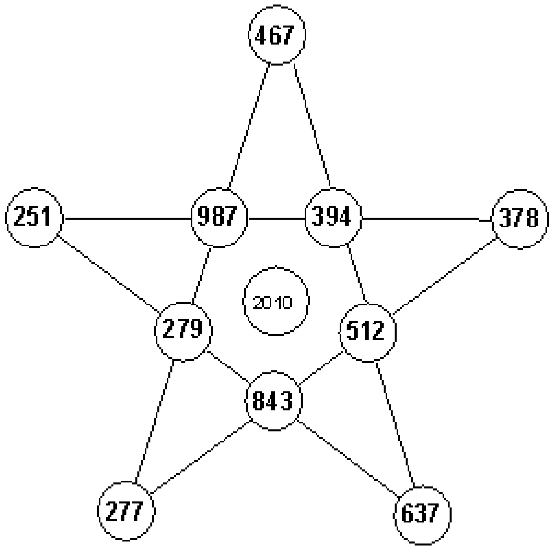
Diese Kenntnis wollen wir direkt nutzen, um einen neuen magischen Stern zu entwerfen.

Gerade geht das Jahr 2010 zu Ende.

Nehmen wir doch 2010 als magische Konstante und fangen einmal so an:



In diesem Fall ist: x = 2010 : 2 + 637 – 378 – 277 = 987
Mit diesem richtigen Eintrag für x ergibt sich sofort ein vollständiger magischer Jahresstern:



Wir hätten sehr gerne auch das aktuelle Jahr 2011 als magische Konstante genommen, aber dann hätten wir einige Bruch- oder Dezimalzahlen im magischen Stern erhalten (wie im Beispiel mit der 85), und das wollten wir nicht so gerne. Irgendwie kommen uns **ganze** Zahlen in den Sternen „viel magischer“ vor.

Wir haben unsere neue Formel noch an vielen Stellen ausprobiert und sie anschließend im Computerprogramm „Excel“ (Lit.verz. 5) programmiert, so dass jetzt der „langweilige“ Teil der Rechnerei für uns wegfallen kann. Damit können wir nun mit „wenigen Mausklicken“ magische „Wunschsterne“ erstellen.

Allerdings muss die magische Konstante k schon eine gewisse Größe haben, wenn man nicht möchte, dass sich Zahlen in den Sternen wiederholen.
Auf dieses Problem gehen wir in Abschnitt 7 noch einmal ein.

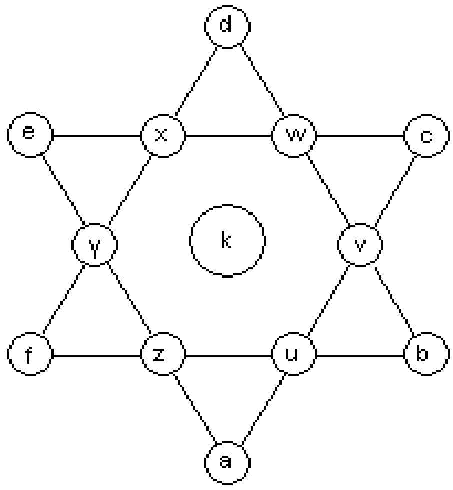
4. Wir analysieren die Bedingungen für den sechszackigen Stern

Nachdem wir nun die erste Schwierigkeit aus dem Anfangsrätsel geklärt haben, wollen wir uns das zweite Problem von S.2 vornehmen, nämlich den **Sechszackstern mit der magischen Konstanten 90**, der leider auch nicht so funktionierte, wie wir es eigentlich geplant hatten.

Wir hatten zuerst versucht, die „Methode der durchschnittlichen Bereinigung“ auch bei den Widersprüchen im sechszackigen Stern anzuwenden.

Beim Sechszackstern funktionierte diese Methode aber leider nicht. Wir haben zusätzlich probiert, die vorgegebene Zahl im Sterneninneren zu verändern, aber auch ohne Erfolg.

Also blieb uns noch der Weg, mit Algebra weiter zu kommen und eine Formel zu finden.



Wir stellen uns vor, dass a, b, c, d, e und f vorgegeben sind.

Damit kennen wir auch die magische Konstante k. (k = a+b+c+d+e+f)

Nun setzen wir eine Zahl (x) im Sterneninneren ein und berechnen u, v, w, y und z:

$y = k – d – f – x$

$z = k – a – e – y = k – a – e – k + d + f + x = d + f + x – a – e$

$u = k – b – f – z = k – b – f – d – f – x + a + e = k + a + e – 2f – b – d – x$

$v = k – c – a – u = k – c – a – k – a – e + 2f + b + d + x = 2f + b + d – 2a – c – e + x$

$w = k – d – b – v = k – d – b – 2 f – b – d + 2a + c + e – x = k – 2d – 2b – 2f + 2a + c + e – x$

$x = k – c – e – w = k – c – e – k + 2d + 2b + 2f – 2a – c – e + x$

$x = 2b + 2d + 2f – 2a – 2c – 2e + x$

Nun stellen wir fest, dass die Variable x, die wir eigentlich ausrechnen wollten, in der Gleichung wegfällt.

Übrig bleibt die Bedingung

$$2b + 2d + 2f - 2a – 2c – 2e = 0$$

Das bedeutet: $2b + 2d + 2f = 2a + 2c + 2e$

Also: $\boxed{b + d + f = a + c + e}$

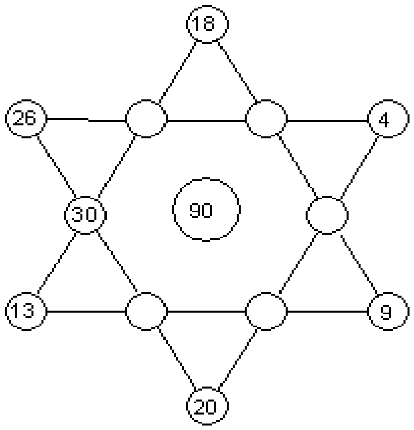
Wenn wir uns den Sechszackstern einmal genauer anschauen, erkennen wir, dass dieser Sternentyp aus zwei ineinander verschachtelten Dreiecken besteht.

In der Formel, die wir erhalten haben, entspricht die Summe b + d + f genau den Spitzen des einen Dreiecks und a + c + e entspricht genau den anderen Dreiecksspitzen.

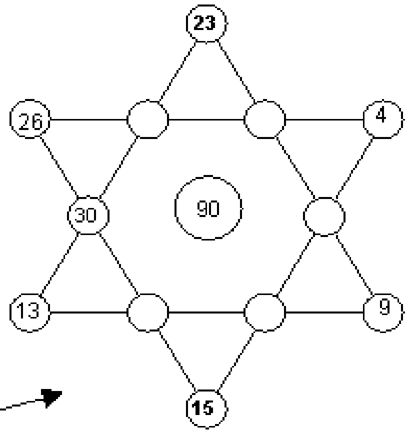
Wir hätten also bei der Vorgabe des 90-er Sterns auf S. 2 darauf achten müssen, dass **die Summe der Zahlen auf den Dreiecksspitzen** jeweils gleich, d.h. **jeweils die Hälfte der magischen Konstanten** ist.
Beim Perelmannstern auf S. 1 haben wir das anschließend überprüft:.
Hier ist bei der magischen Konstanten 26 für jedes Teildreieck die Teilsumme gleich 13.

Ist bei irgendeinem sechszackigen Stern die oben errechnete **Bedingung für die Sternspitzen erfüllt**, dann kann man **x im Sterneninneren beliebig** wählen.

Mit diesen Kenntnissen können wir nun auch den sechszackigen Stern mit der magischen Konstanten 90 so verändern, dass er funktioniert. Aus unseren Formeln wird nun klar, warum dieser Stern gar nicht möglich sein kann:
In den beiden Dreiecksspitzen betragen die Teilsummen 40 und 50. Eigentlich müsste in jeder der beiden Teilsummen **90 : 2 = 45** stehen.



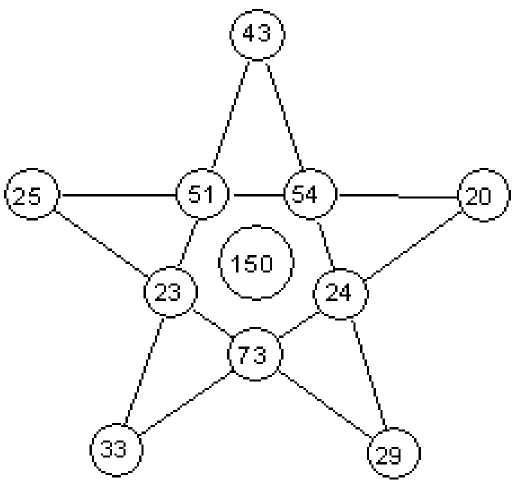
Dieser Stern von S.2
funktionierte nicht!



Wir ändern also die 18 in 23 um und anstelle der 20 schreiben wir 15. Und diesen Stern kann man erfolgreich ergänzen!
Auch dann, wenn man die 30 im Inneren durch eine andere beliebige Zahl ersetzt, klappt die Ergänzung!

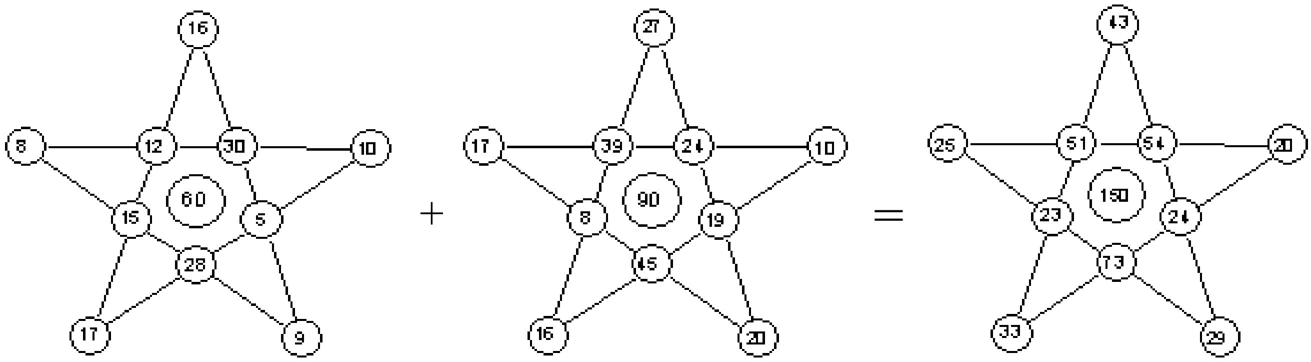
5. Aus alt mach neu – Wie man neue magische Sterne mit Hilfe bekannter Sterne erstellt

Den folgenden Stern haben **wir nicht mit Formeln** gefunden!



Wie er wohl entstanden ist?
Ganz einfach !

Wir haben zwei Sterne addiert, und zwar Onkel Werners Geburtstagsstern und den anderen (korrigierten) Fünfzackstern von S. 3, die wir außerdem auch noch beide gedreht haben:

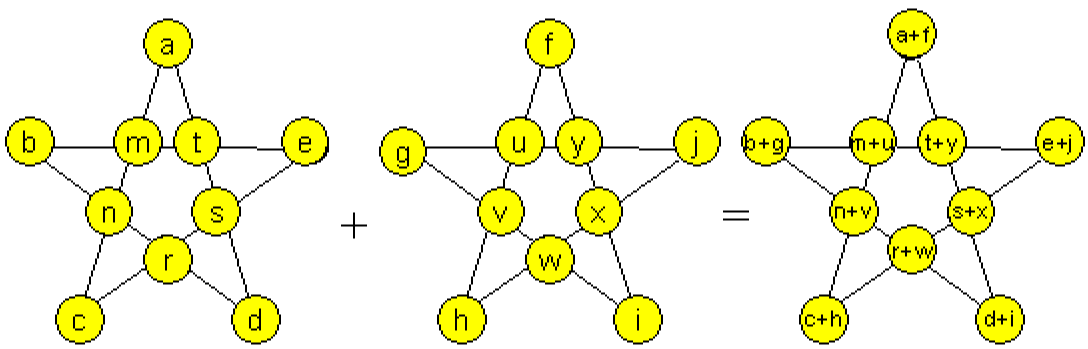


Wenn man einen Stern mit der magischen Konstanten 300 sucht, dann ergeben sich weitere interessante Möglichkeiten. Wir addieren den 150er Stern zu sich selbst - oder noch einfacher - wir multiplizieren jeden Zahleneintrag mit 2.
Natürlich hätten wir auch direkt Onkel Werners Geburtstagsstern mit 5 multiplizieren können, um 300 als magische Konstante zu erhalten.

Wir formulieren diese Feststellungen jetzt in allgemeiner Form und beweisen sie:

I. Addiert man zwei magische Sterne (mit der gleichen Anzahl von Zacken), so erhält man wieder einen magischen Stern. (Summenregel)

Begründung:



Magische Konstante:k

Magische Konstante:z

Magische Konstante ???

Es gilt für die linke untere Sternenseite des Summensterns:

(b+g) + (n+v) + (r+w) + (d+i) = (b+n+r+d) + (g+v+w+i) = k + z

Auch für die anderen Sternenseiten des Summensterns ergibt sich k + z

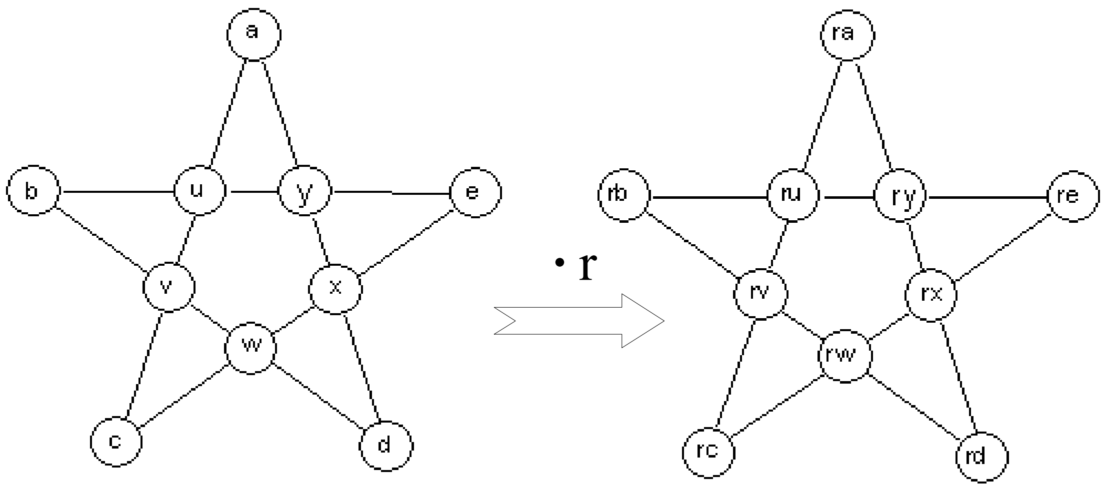
Für die Sternenspitzen errechnen wir:

(a+f) + (b+g) + (c+h) + (d+i) + (e+j) = (a+b+c+d+e) + (f+g+h+i+j) = k + z

Also ist der Summenstern auch ein magischer Stern. Seine magische Konstante ist auch die Summe der alten magischen Konstanten, nämlich k+z.

II. Multipliziert man jeden Eintrag eines magischen Sterns mit derselben Zahl, so erhält man wieder einen magischen Stern.
(Regel für die Multiplikation mit einem konstanten Faktor)

Begründung:



Wenn der erste Stern mit der Konstanten k magisch ist, dann gilt z.B.

a+u+v+c = k (genauso für die anderen Sternenseiten) und für die Spitzen: a+b+c+d+e = k

Nun berechnen wir die Seiten- und Spitzensummen im anderen Stern:

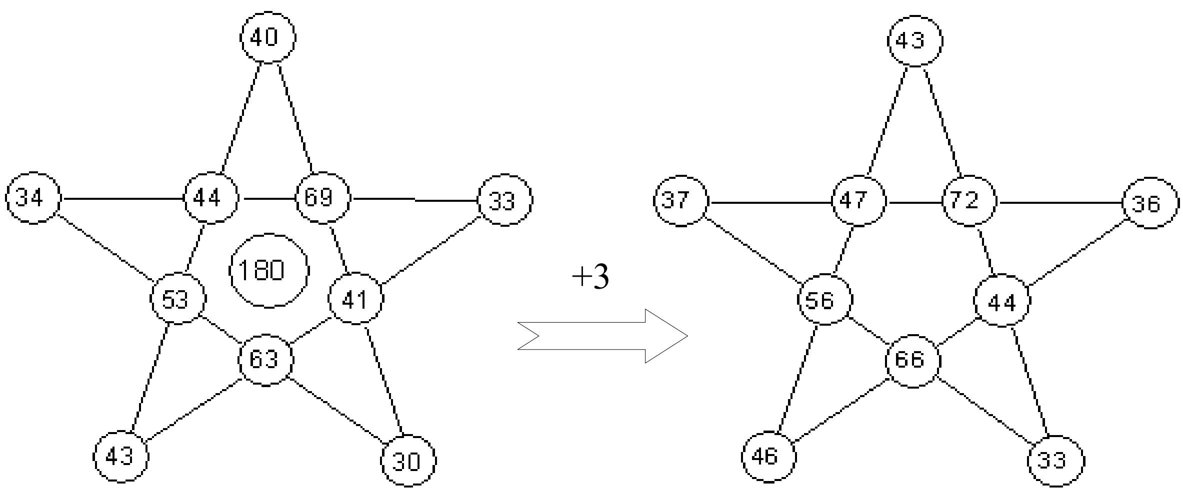
ra+ru+rv+rc = r · (a+u+v+c) = r · k (genauso für die anderen Seiten)

ra+rb+rc+rd+re = r · (a+b+c+d+e) = r · k

Bei diesen beiden Beweisen haben wir hauptsächlich das Kommutativgesetz der Addition und das Distributivgesetz benutzt.

Wir hatten noch zwei weitere gute Ideen, die wir auch gerne vorstellen möchten, obwohl sie nicht funktionieren:

Wenn man zu jedem Eintrag eines magischen Sternes die gleiche Zahl addiert, z.B. die Zahl 3, dann erhält man leider keinen magischen Stern.



Die Summen der Sternseiten betragen zwar beim neuen Stern immer 192, aber die Summe der Spitzen (195) ist um 3 zu groß.

Auch dann, wenn man **zwei magische Sterne miteinander** nach dem gleichen Verfahren **multipliziert,** wie man sie erfolgreich addieren kann, wird man leider keinen neuen magischen Stern erhalten. Wir haben es versucht und festgestellt, dass bereits die Seitensummen immer verschiedene Zahlen ergeben, weil in diesem Fall das Distributivgesetz nicht benutzt werden kann.

Die Sätze **I** und Sätze **II**, die wir für magische Fünfzacksterne formuliert und bewiesen haben, sind natürlich auch für Sechszacksterne anwendbar.

6. Der „Kleinste“ macht das Rennen - Basissterne und Minimalsterne

Der sechszackige Perelmanstern auf Seite 1 ist ein ganz besonderer magischer Stern. Er ist der **kleinste** Stern mit natürlichen Zahlen, die alle verschieden sind, das heißt: Keine Zahl kommt mehr als einmal vor.
Dieser Stern enthält also alle Zahlen von 1 bis 12, und jede genau einmal.

So etwas Schönes wollten wir auch gerne für einen fünfzackigen Stern entwerfen. Wir haben uns zuerst mit Hilfe des Perelmannsterns überlegt, welche magische Konstante wir festsetzen müssen.

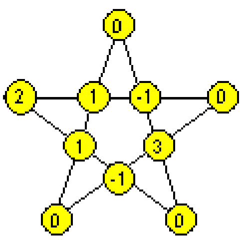
Zuerst machten wir uns klar, warum die magische Konstante im Perelmannstern den Wert 26 haben muss. Diese Zahl kommt dadurch zustande, dass man alle Zahlen von1 bis 12 addiert und dann durch 6 dividiert, weil der Stern sechs Seiten hat. Es ergibt sich 78 : 6 = 13. Jede Zahl des Sterns liegt aber auf zwei Sternenseiten, so dass das Doppelte von 13, nämlich 26, als Seitensumme (magische Konstante) herauskommt .

Um die magische Konstante für den Fünfzack zu errechnen, addierten wir alle Zahlen von 1 bis 10 und erhielten 55. Diese Summe haben wir durch 5 dividiert und mit 2 multipliziert. Daraus erhielten wir die Information, dass die magische Konstante 22 lauten muss.

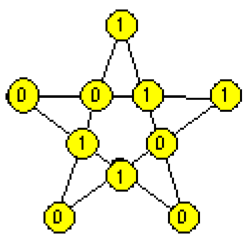
Obwohl wir uns intensiv bemüht haben (zuerst durch Kopfrechnen und dann mit unserem Excel-Programm), einen solchen magischen Stern zu finden, haben wir dieses Ziel nicht erreicht. Dann fanden wir in einem Buch (Lit.verz. [2]) eine Begründung dafür, dass noch nicht einmal ein „halbmagischer“ fünfzackiger Stern (einer, bei dem die Summe der Stern**spitzen nicht** die **magische Konstante k** haben muss) zu realisieren ist.
Daher kann es erst recht keinen magischen Stern mit den Zahleneinträgen 1 bis 10 und der magischen Konstanten 22 geben.

Weil dieses erste Ziel für den „kleinsten Fünfzackstern“ leider nicht erreichbar ist, haben wir uns gefragt, welche natürliche Zahl die **kleinste magische Konstante** eines **fünfzackigen Sterns** sein kann, wenn man auch erlaubt, dass **einzelne Einträge im Stern mehrfach** vorkommen dürfen.

Da die magische Konstante eine gerade Zahl sein muss, wäre die kleinstmögliche Konstante durch die Zahl 2 gegeben. Mit unseren Formeln überlegten wir, dass ein solcher magischer Stern („Basisstern“) folgendermaßen aussehen könnte:



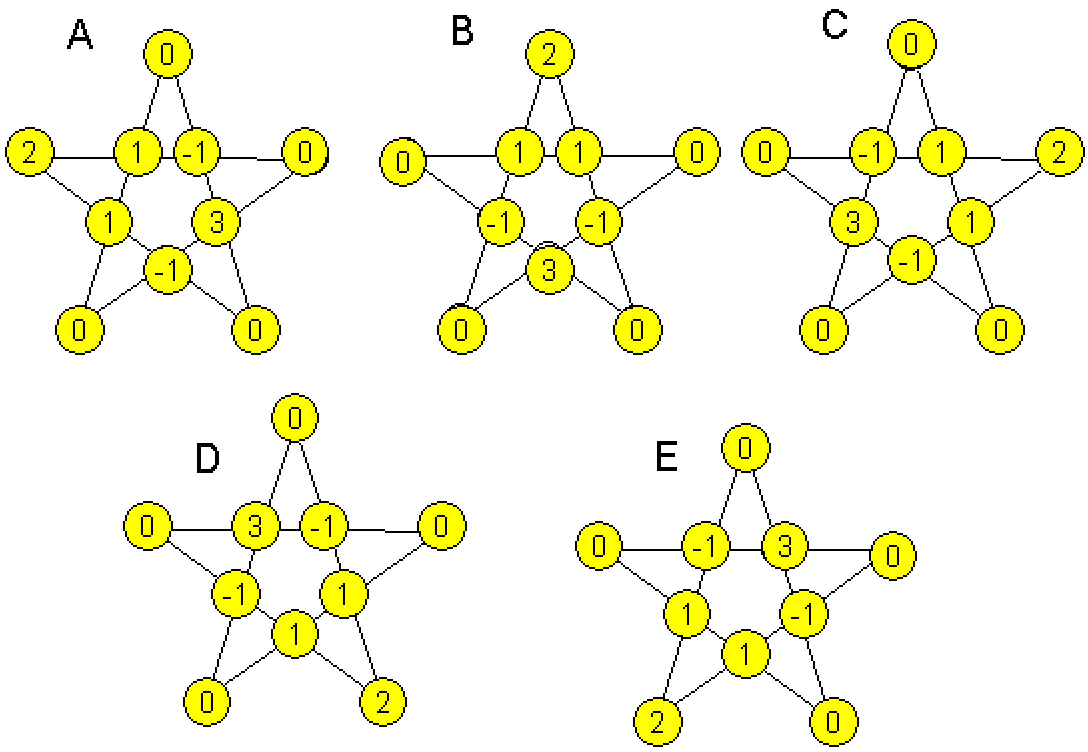
Basisstern Typ 1



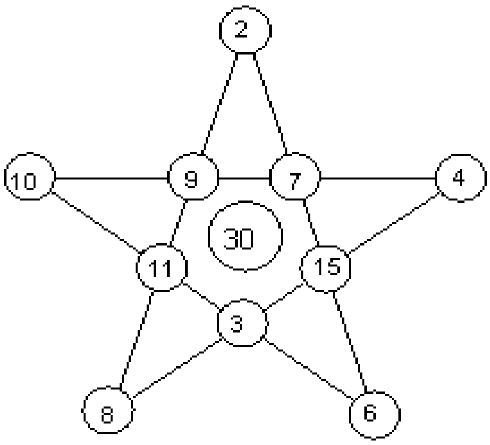
Basisstern Typ 2

Da uns in Typ 1 die negativen Zahlen nicht ganz so gut gefielen, haben wir uns noch einen zweiten derartigen Stern (Typ 2) überlegt. Dieser enthält nur positive Zahleneinträge. Allerdings fallen einige Rechnungen bei Typ 1 einfacher aus. Wegen dieses Vorteils haben wir auch mit Typ 1 weiter gearbeitet.

Weitere Sterne mit der magischen Konstanten 2 erhält man, indem man die beiden obigen Sterne mehrfach um jeweils 72° dreht.
Wir führen das einmal für den Basisstern „Typ 1“ durch:



Da diese fünf Sterne die kleinstmögliche natürliche Zahl als magische Konstante haben, können wir sie beliebig vervielfachen und addieren. Auf diese Weise haben wir den folgenden magischen Stern erhalten, der sehr kleine natürliche Zahlen enthält und die magische Konstante 30 hat.
Wir haben einfach Stern B mit 1, C mit 2, D mit 3, E mit 4 und A mit 5 multipliziert und diese Sterne anschließend addiert.
So ergab sich die magische Summe $k = 2*1 + 2*2 + 2*3 + 2*4 + 2*5 = 30$ sowie der folgende Ergebnisstern:



Mit dem gleichen Verfahren dieser fünf „Basissterne“ (siehe oben) haben wir noch intensiv weiter experimentiert, aber nicht immer ein solch zufriedenstellendes Ergebnis erzielt.

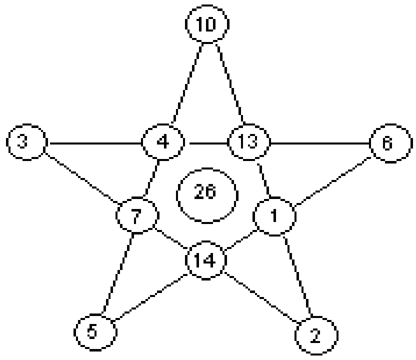
Häufig kamen dann Zahlen mehrfach vor, was wir bei den Basissternen noch akzeptiert haben, was wir aber bei „schönen“ Exemplaren natürlich nicht wollten.

Glücklicherweise ergab sich sehr oft, dass nach der Vervielfachung und Addition von Basissternen die negativen Zahlen der Basissterne in den positiven Bereich übergingen.

Manchmal aber traten auch in den fertigen Sternen negative Zahlen auf.

So etwas passiert nicht, wenn wir den Basisstern vom Typ 2 ebenfalls drehen.

Hierzu soll folgendes Beispiel dienen, was wir aus dem Basisstern Typ 2 so errechnet haben:
8A-2B+4C+D+2E (B,C,D und E beschreiben die gedrehten Sterne von Typ 2).



Bei all unseren Experimenten mit fünfzackigen Sternen war dieser Stern derjenige, der die kleinste magische Konstante besitzt und bei dem sich keine der zehn positiven Zahlen wiederholt.

Es kam zwar die 14 als größte Zahl vor, aber wir haben unser „großes" Ziel, **einen sehr kleinen magischen Fünfzackstern** zu finden, damit auch erreicht.

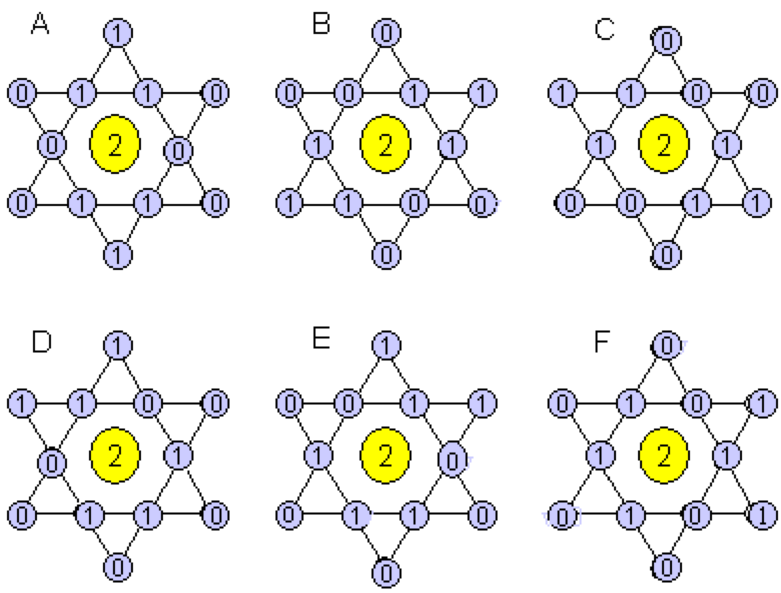
Wir können nun zu jeder vorgegebenen magischen Konstanten (am besten für gerade Zahlen über 30) einen magischen Stern aus unseren fünf Basissternen zusammensetzen.

Zum Beispiel entsteht Onkel Werners Geburtstagsstern von Seite 1 auf folgende Weise aus den Basissternen (Typ 1): 8A + 5B + 4,5C + 8,5D + 4E

Aber aus welchen Basissternen kann der Perelmannstern entwickelt werden?

Dieses müssten natürlich sechszackige Sterne sein. Allerdings fiel es uns viel schwerer, sechs verschiedenartige Basissterne zu finden, weil sich bereits nach dreimaligem Drehen solche „Basissterne" ergaben, die schon einmal vorhanden waren.

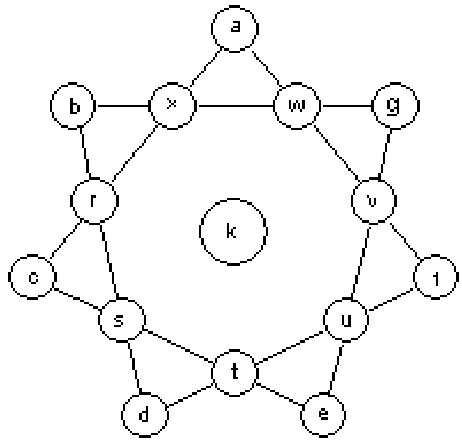
Wir ermittelten aber noch drei weitere Basissterne, so dass wir nun den Perelmannstern z.B. auf diese sechs Sterne zurückführen können:



Der Perelmannstern errechnet sich aus: 3A+B+2C+2D+5E+0F

7. Sterne mit sieben oder mehr Zacken

Viele Einzelheiten, die wir über magische Sterne herausgefunden haben, lassen sich auch auf Sterne mit mehr als sechs Spitzen übertragen, z. B. auf den „Siebenzack".



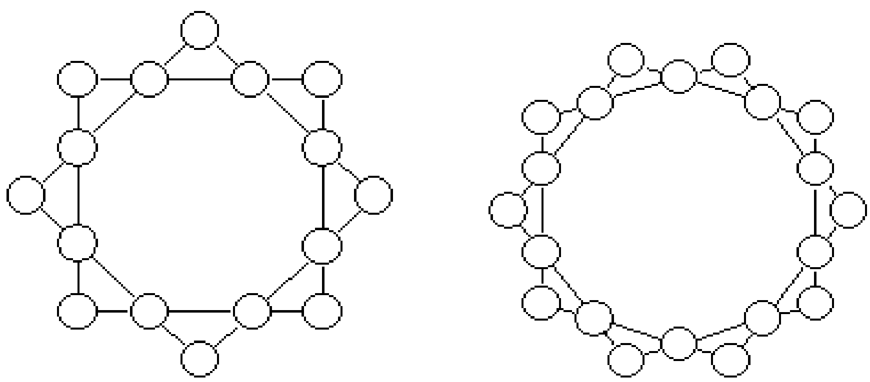
Wenn die Spitzen a,b,c,d,e,f,g, bekannt sind, können wir nach dem gleichen Verfahren wie beim Fünfzack auf S.5 die Variable x nach folgender Formel errechnen:

$$\boxed{x = 0{,}5k - e + d + f - c - g}$$

Für einen neunzackigen Stern oder einen anderen mit ungerader Eckenzahl ergeben sich ähnliche Formeln.

In allen Fällen gilt, dass man zur Berechnung der ersten Zahl x im Sterneninneren alle Sternspitzen benötigt außer den beiden benachbarten Sternspitzen. Die beiden anderen Sternspitzen (a und c) stecken zwar in der magischen Konstanten k, aber die Formel wird komplizierter, wenn man k durch a+b+c+d+e+f+g ersetzt.

Für den achtzackigen Stern (und alle Sterne mit gerader Eckenzahl) können wir genauso vorgehen wie beim sechszackigen Stern:



Diese Sterne bestehen immer aus zwei Teilfiguren, auf die man jeweils die halbe magische Konstante verteilen muss. Der erste Eintrag (x) im Sterneninneren kann dann beliebig gewählt werden, weil wir wieder eine allgemeingültige Gleichung (0 = 0) erhalten, bei der das x wegfällt.

8. Schlussbemerkungen

Außer, dass wir die magischen Sterne nun gründlich erforscht haben, haben wir noch zusätzlich vieles gelernt und geübt: Wir konnten unsere Kenntnisse in der Anwendung der Programme „Microsoft Word" und „Microsoft Excel" (Lit.verz. [5]) verbessern. Sämtliche Sterne haben wir mit „DynaGeo" (Lit.verz. 6) selbst gezeichnet und beschriftet.

Das Beschriften mit Zahlen stellte sich in „DynaGeo“ manchmal schwierig dar, da in dem Programm keine doppelte Zahlenbenennung erlaubt ist. Andererseits haben wir durch diesen scheinbaren Nachteil eventuell vorkommende **gleiche Zahlen** im magischen Stern sofort identifiziert.

Weil wir im Zusammenhang mit den Basissternen aber auch gleiche Zahleneinträge erlauben wollten, mussten wir uns etwas Neues einfallen lassen. Wir kopierten die Sterne aus DynaGeo auf eine PowerPoint-Folie, auf der wir sie so beschriften konnten, wie wir wollten.Wir mussten nur den kleinen Nachteil in Kauf nehmen, dass die Kreise nicht so ideal passen wie in DynaGeo. Die PowerPoint-Folien haben wir auch in diese Arbeit eingefügt.

Um Sterne auf ihre Basisterne zurückzuführen, haben wir die Gleichungssysteme teilweise mit Derive gelöst.

Onkel Werner war von der Erzeugung seines Geburtstagssterns so begeistert, dass er im nächsten Jahr für Tante Annegret einen ganz besonderen Glücksstern entwerfen möchte, der viele wichtige Daten und Zahlen aus ihrem Leben enthält. Wir werden ihn dabei mit unseren neuen Kenntnissen tatkräftig unterstützen.

Wir selbst sehen auf dem Gebiet der „Sternenmathemagie“ noch zahlreiche weitere Forschungsmöglichkeiten, die wir uns für die Zukunft gerne vornehmen wollen.

9. Literatur- und Quellenverzeichnis

[1] Perelmann, Unterhaltsame Aufgaben und Versuche, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt 1977

[2] Helmut Kracke, Mathe-musische Knobelisken, Dümmler-Verlag Bonn 1983

[3] Stoffel, Kranz, Hilgers: Semimagische Quadrate aus Dominosteinen und semimagische Sterne, Wettbewerbsarbeiten „Schüler experimentieren“ 1997/98

[4] Kelsey, Kenneth: Magische Quadrate, erschienen 1983, Neuauflage 2007

[5] Microsoft: Word, Excel, PowerPoint (Versionen 2000 (Schullizenz) und 2007 (privat))

[6] EUKLID DynaGeo (Schullizenz)

[7] Derive 6 (Schullizenz)

[8] Open office org3 (privat)

10. Lösungen der Aufgaben von S.2

Die fehlenden Einträge im 1. Stern mit der magischen Konstanten 100 lauten im Gegenuhrzeigersinn:
33, 36, 46, 22 und 38.
Im 2. Stern mit der magischen Konstanten 120 fehlen – im Gegenuhrzeigersinn – die folgenden Zahlen:
30, 55, 12 und 58.
Bei den beiden anderen Sternen (mit der magischen Konstanten 90) verwickelt man sich ständig in Widersprüche. Diese Sterne können nicht zu magischen Sternen ergänzt werden.
Warum das so ist? Einfach den Text dieser Arbeit weiter lesen!

11. Erklärung

Hiermit erklären wir, dass wir die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet haben.

Insbesondere versichern wir, dass wir alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als solche kenntlich gemacht haben.

gez. Leonard Preisler　　　　　　gez. Max Graf

Inhaltsverzeichnis