

DGZfP-Berichtsband BB 69-CD
Vortrag M3

Erfassen dielektrischer Stoffeigenschaften mit Resonatoren

E. Trinks, K. Kupfer, MFPA Weimar an der Bauhaus-Universität, Weimar

Kurzfassung

Es wird ein Resonatormodell vorgestellt, welches gestattet, die Beziehungen zwischen den dielektrischen Materialeigenschaften, beschrieben durch die komplexe Permittivität, und den Resonatorkennwerten Resonanzfrequenz und Resonatorgüte zu simulieren. Die Kenntnisse der Zusammenhänge zwischen diesen Größen vermeiden Fehlinterpretationen bei der Messung der dielektrischen Materialeigenschaften, insbesondere, wenn andere Stoffeigenschaften, wie z.B. Feuchte und Dichte, ermittelt werden sollen.

Bei der Messung feuchter Materialien mit dielektrischen Messverfahren werden den Feuchte- und Dichtewerten des zu messenden Stoffes die elektrischen Größen Resonanzfrequenz und Güte, bzw. Dämpfung und Phase zugeordnet. Durch empirisch gefundene Verknüpfungen der elektrischen Messwerte kann eine dichteunabhängige Bestimmung der Feuchte in bestimmten Feuchte- und Dichtebereichen realisiert werden. Für theoretische und praktische Untersuchung zur Dichteunabhängigkeit ist es von Vorteil, die Abhängigkeit der Permittivität von Feuchte und Dichte einerseits und die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz und der Güte von der Permittivität andererseits zu betrachten.

In diesem Beitrag werden die grundsätzlichen Beziehungen zwischen Permittivität und Resonatorkennwerten unter Berücksichtigung der Einflüsse von Leitfähigkeit, hohen dielektrischen Verlusten und konstruktiver Gestaltung des Resonators betrachtet.

Messprinzip

Die Parallelschaltung einer komplexen Induktivität \underline{L} und einer komplexen Kapazität \underline{C} ergibt ein resonanzfähiges Gebilde (Bild 1). Der Kondensator ist konstruktiv so gestaltet, dass er die zu untersuchenden Stoffe aufnehmen kann. Wird ein sinusförmiger Strom mit konstanter Amplitude in diese Anordnung eingespeist, dann sind Amplitude und Phasenverschiebung der sich einstellenden Spannung eine Funktion der Frequenz ω . Bei der Frequenz $\omega = \omega_r$ (Resonanzfrequenz) hat die Spannung U ein

Maximum ($U=U_r$) und die Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung ist gleich Null. Der frequenzabhängige Spannungsverlauf wird durch Gl.(1) beschrieben.

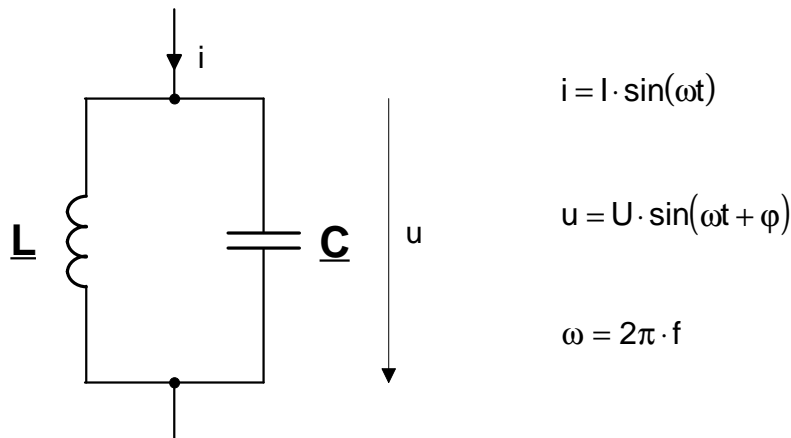


Bild 1: Verlustbehafteter Parallelresonanzkreis

$$U = \frac{U_r}{\sqrt{1 + Q^2 v^2}} \quad (1)$$

$$v = \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \quad \text{relative Verstimmung}$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{Resonanzfrequenz}$$

$$Q = \frac{1}{\tan \delta_L + \tan \delta_C} \quad \text{Güte des Resonanzkreises}$$

Die komplexe Kapazität \underline{C} ist das Produkt aus dem Geometriefaktor k (geometrische Abmessungen des Kondensators) und der komplexen Permittivität (komplexe Dielektrizitätskonstante) $\underline{\epsilon}$.

$$\underline{C} = k \cdot \underline{\epsilon}$$

$$\underline{\epsilon} = \epsilon_0 (\epsilon_r' - j\epsilon_r'')$$

komplexe Permittivität (Dielektrizitätskonstante)

ϵ_r' - Realteil der relativen Permittivität

ϵ_r'' - Imaginärteil der relativen Permittivität

ϵ_0 - elektrische Feldkonstante
(Permittivität des leeren Raumes)

$\epsilon_0 = 8,854 \text{ pF/m}$

$$\underline{C} = k \cdot \varepsilon_0 (\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'') = k \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r' \left(1 - j \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'} \right) \quad (2)$$

Eine komplexe Kapazität kann allgemein wie folgt beschrieben werden

$$\underline{C} = C(1 - j \tan \delta_C), \quad (3)$$

wobei C die verlustlose Kapazität und $\tan \delta_C$ den Verlustfaktor darstellen. Vergleicht man Gl.(2) mit Gl.(3), dann ergibt sich für die verlustlose Kapazität:

$$C = k \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r' \quad (4)$$

und für den Verlustfaktor:

$$\tan \delta_C = \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'} \quad (5)$$

Wird Gl.(4) in die Formel für die Resonanzfrequenz eingesetzt, dann beschreibt dieser Ausdruck die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz ω_r von ε_r'

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L \cdot k \varepsilon_0 \varepsilon_r'}} \quad (6)$$

Wird Gl.(5) in die Formel für die Güte eingesetzt, so ist diese eine Funktion vom Quotienten aus Imaginärteil und Realteil der relativen Permittivität

$$Q = \frac{1}{\tan \delta_L + \varepsilon_r'' / \varepsilon_r'} \quad (7)$$

Für den luftgefüllten Kondensator („leerer Resonator“) mit den Permittivitätswerten $\varepsilon_r' = 1$ und $\varepsilon_r'' = 0$ ist die Resonanzfrequenz

$$\omega_r^* = \frac{1}{\sqrt{L \cdot k \varepsilon_0}} \quad (8)$$

und die Güte

$$Q^* = \frac{1}{\tan \delta_L} \quad (9)$$

Sind ω_r^* und Q^* für den luftgefüllten Kondensator bekannt, dann lauten Gl.(6) und Gl.(7) für die Resonanzfrequenz und für die Güte materialgefüllter Kondensatoren ($\varepsilon_r' > 1$ und $\varepsilon_r'' > 0$, bzw. $\tan \delta_C > 0$)

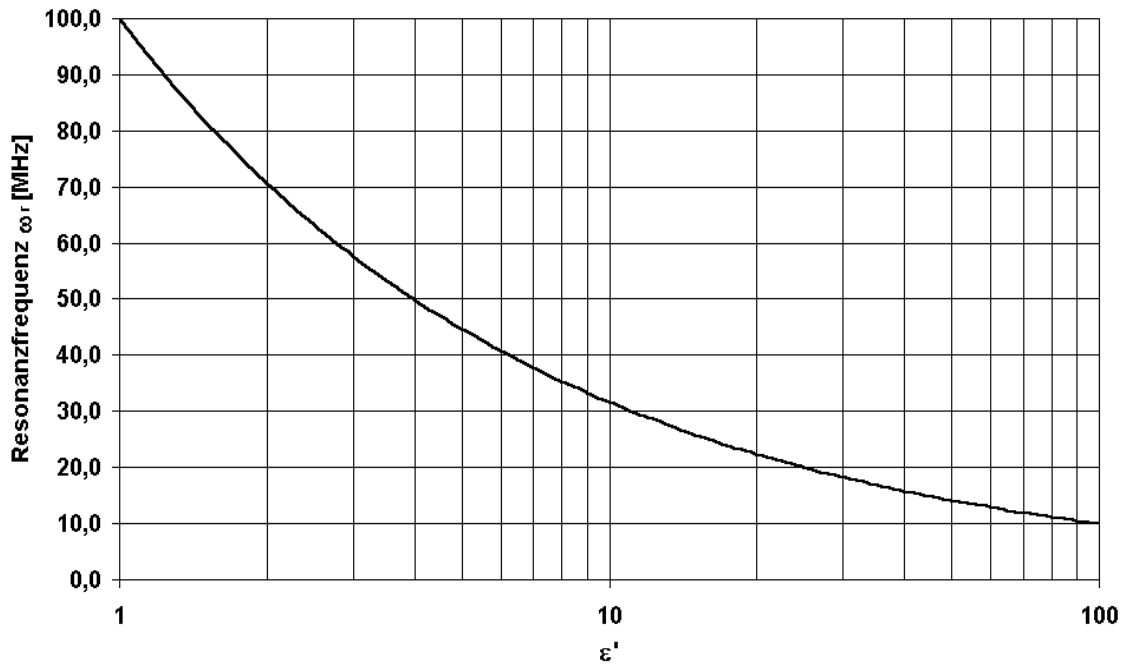


Bild 2: Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Permittivität ($\omega_r^*=100\text{MHz}$)

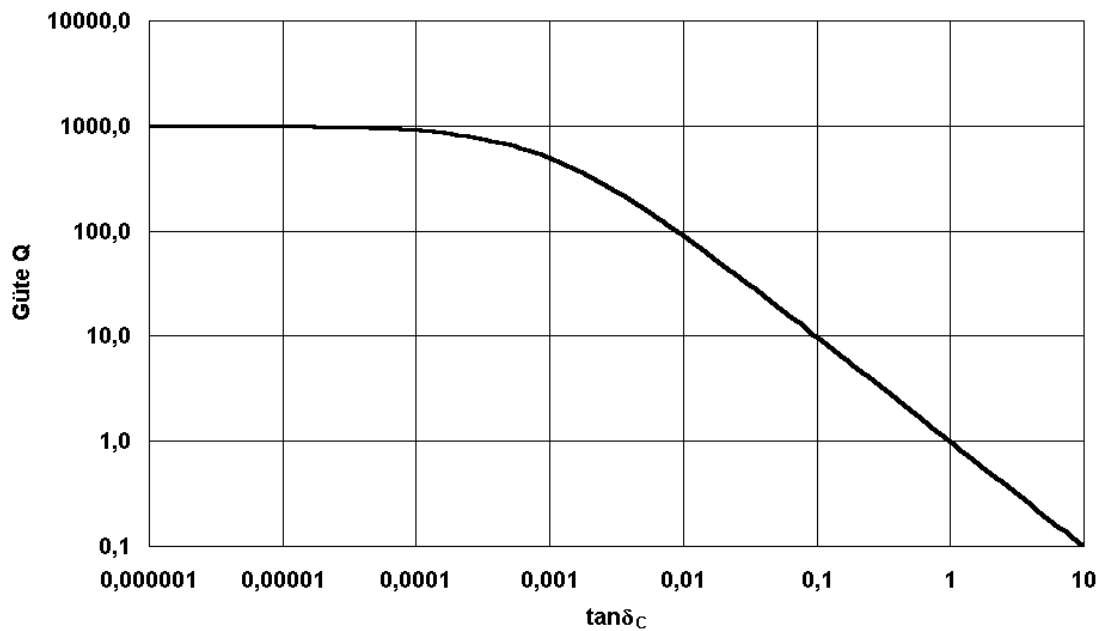


Bild 3: Güte in Abhängigkeit vom Verlustfaktor ($Q^*=1000$)

$$\omega_r = \frac{\omega_r^*}{\sqrt{\epsilon_r'}} \quad (10)$$

$$Q = \frac{Q^*}{1 + Q^* \cdot \epsilon_r'' / \epsilon_r'} = \frac{Q^*}{1 + Q^* \cdot \tan \delta_c} \quad (11)$$

Aus Gl.(10) erhält man die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Permittivität ϵ_r' (Bild 2) und aus Gl.(11) die Güte in Abhängigkeit vom Verlustfaktor $\tan \delta_c$ (Bild 3).

Resonanzfrequenz ω_r und Güte Q lassen sich aus dem Amplitudenfrequenzgang Gl.(12), bzw. aus dem Phasenfrequenzgang Gl.(13) des Resonanzkreises ermitteln (Bild 4).

$$\frac{U}{U_r} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \nu^2}} \quad (12)$$

$$\arctan \varphi = Q \cdot \nu \quad (13)$$

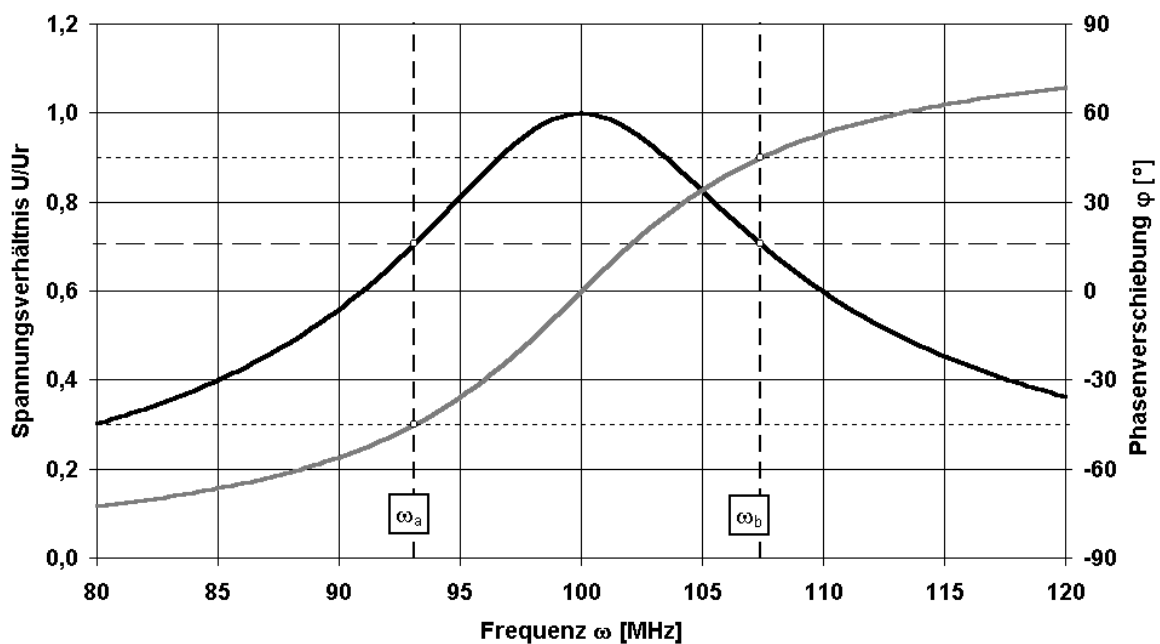


Bild 4: Amplituden- und Phasenfrequenzgang für $\omega_r=100$ MHz und $Q=7$

Mit den Randbedingungen

$$\frac{U}{U_r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ bzw. } \varphi = -45^\circ \text{ und } \varphi = +45^\circ$$

erhält man die Frequenzen ω_a und ω_b (s. Bild 4), mit deren Hilfe die Resonanzfrequenz und die Güte berechnet werden kann.

$$\omega_a = -\frac{\omega_r}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_r}{2Q}\right)^2 + \omega_r^2} \quad (14)$$

$$\omega_b = +\frac{\omega_r}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_r}{2Q}\right)^2 + \omega_r^2} \quad (15)$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_a \cdot \omega_b} \quad (16)$$

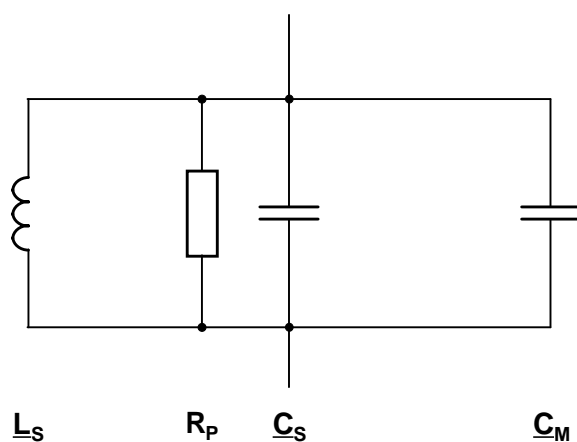
$$Q = \frac{\omega_r}{\omega_b - \omega_a} = \frac{\sqrt{\omega_a \cdot \omega_b}}{\omega_b - \omega_a} \quad (17)$$

Resonatormodell

Im Messprinzip sind folgende Faktoren, die Resonanzfrequenz und Güte beeinflussen, nicht berücksichtigt:

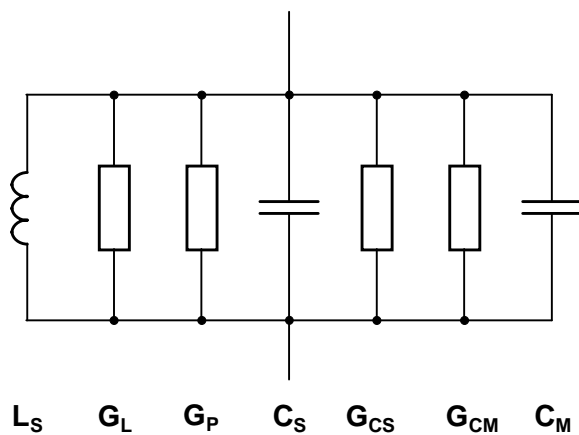
- Verlustfaktor $\tan\delta_C > 0,01$ für stark verlustbehaftete (feuchte) Materialien
- Ionenleitfähigkeit (insbesondere von feuchten Stoffen)
- konstruktiv bedingt kann der Messkondensator nicht vollständig mit Material gefüllt werden
- parasitäre Kapazitäten, bzw. Abgleichkondensatoren
- parasitäre Wirkwiderstände, bzw. Abgleichwiderstände.

Unter Berücksichtigung o.g. Punkte erhält man die im Bild 5 dargestellte Resonatoranordnung. Das dazugehörige Ersatzschaltbild zeigt Bild 6.



- \underline{L}_S - verlustbehaftete (Sensor-) Induktivität
- R_P - Wirkwiderstand
- \underline{C}_S - verlustbehaftete (Sensor-) Kapazitäten, die nicht durch das zu messende Material beeinflusst werden
- \underline{C}_M - Messkapazität

Bild 5: Resonatoranordnung



- L_S - verlustlose Induktivität
- G_L - Wirkleitwert durch Induktivitätsverluste
- G_P - Wirkleitwert ($=1/R_P$)
- C_S - verlustlose Kapazität, die nicht durch das zu messende Material beeinflusst wird
- G_{CS} - Wirkleitwert durch C_S -Verluste
- C_M - Messkondensator
- G_{CM} - Wirkleitwert durch Messkondensatorverluste

Bild 6: Ersatzschaltbild der Resonatoranordnung

Die Wirkleitwerte der verlustbehafteten Elemente ergeben sich aus deren Ersatzschaltbildern [1]:

$$G_L = \frac{\tan \delta_L}{\omega \cdot L_S} \quad (18)$$

$$G_{CS} = \omega \cdot C_S \tan \delta_{CS} \quad (19)$$

$$G_{CM} = \omega \cdot C_M \tan \delta_{CM} \quad (20)$$

Der Verlustfaktor der Messkapazität setzt sich aus den dielektrischen Verlusten und den Leitfähigkeitsverlusten zusammen [2].

$$\tan \delta_{CM} = \tan \delta_\epsilon + \frac{\kappa}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{1}{\omega} \quad (21)$$

$$\tan \delta_\epsilon = \frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r} \quad \text{dielektrische Verluste}$$

$$\frac{\kappa}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{1}{\omega} = \kappa^* \cdot \frac{1}{\omega} \quad \text{Leitfähigkeitsverluste}$$

Um den Amplituden- und Phasenfrequenzgang für die Resonatoranordnung nach Bild 6 darstellen zu können, wird zuerst der komplexe Scheinleitwert (Admittanz) ermittelt. Dieser ist definiert durch die Summe aus Wirkleitwert (Konduktanz) G und Blindleitwert (Suszeptanz) B .

$$\underline{Y} = G + jB \quad (22)$$

Der Betrag der Admittanz (Scheinleitwert) ist

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} \quad (23)$$

und die Phasenverschiebung

$$\varphi = \arctan \frac{B}{G}. \quad (24)$$

Der Gesamtwirkleitwert ist nach Bild 6

$$G = G_L + G_{CS} + G_{CM} + G_P.$$

Mit den Gleichungen (18), (19) und (20) entsteht folgende Form

$$G = \frac{\tan \delta_L}{\omega L_S} + \omega C_S \tan \delta_{CS} + \omega C_M \tan \delta_{CM} + G_P,$$

bzw.

$$G = \frac{\tan \delta_L}{\omega L_S} + \omega C \tan \delta_C + G_P \quad (25)$$

$$C = C_S + C_M$$

$$\tan \delta_C = \frac{C_S}{C} \tan \delta_{CS} + \frac{C_M}{C} \tan \delta_{CM}$$

und einem Blindleitwert

$$B = \omega C_S + \omega C_M - \frac{1}{\omega L_S} = \omega C - \frac{1}{\omega L_S}. \quad (26)$$

Werden Gl.(25) und Gl.(26) in Gl.(23), bzw. Gl.(24) eingesetzt, dann erhält man für den Betrag der Admittanz die Beziehung

$$Y = \sqrt{\left(\frac{\tan \delta_L}{\omega L_S} + \omega C \tan \delta_C + G_P \right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L_S} \right)^2} \quad (27)$$

und für die Phasenverschiebung den Ausdruck

$$\varphi = \arctan \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L_S}}{\frac{\tan \delta_L}{\omega L_S} + \omega C \tan \delta_C + G_P}. \quad (28)$$

Bild 7 zeigt ein Beispiel für den Verlauf von Y und φ in Abhängigkeit von der Frequenz, wobei folgende charakteristische Punkte zu erkennen sind:

- bei $\omega = \omega_0$ ist die Phasenverschiebung gleich Null
- bei $\omega = \omega_r$ hat der Scheinleitwert Y ein Minimum (Y_{\min})
- bei $\omega = \omega_{ph}$ hat der Phasenfrequenzgang einen Wendepunkt.

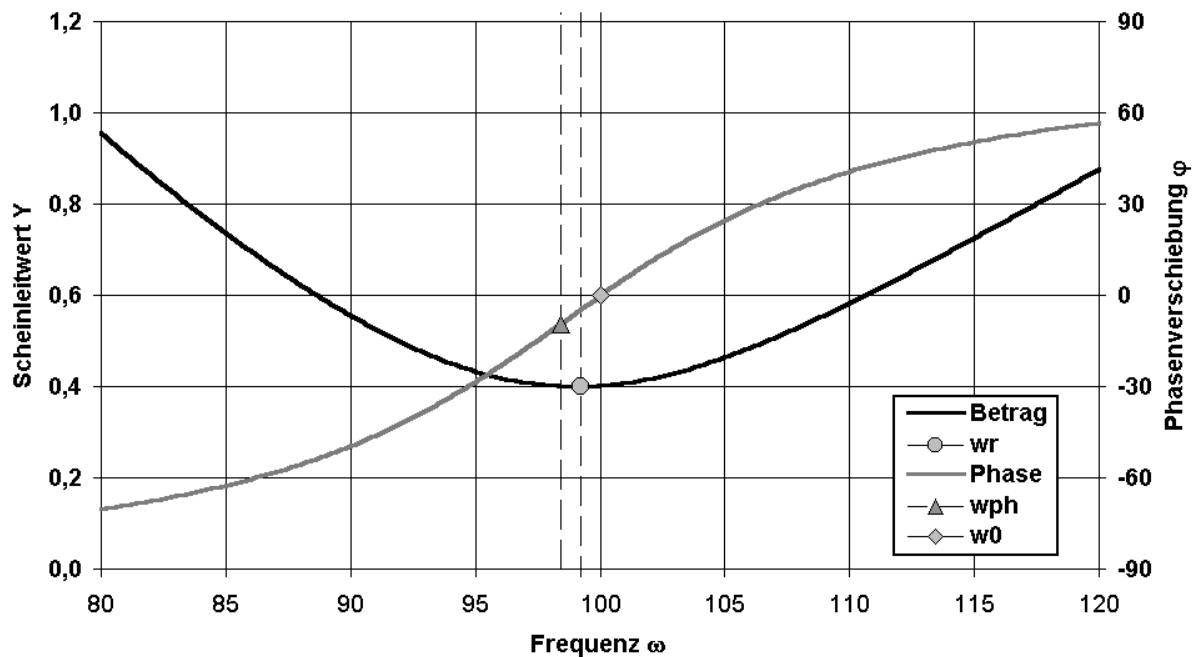


Bild 7: Scheinleitwert Y und Phasenverschiebung φ in Abhängigkeit von der Frequenz ω

Ermittlung von ω_0

Mit $B=0$ folgt aus Gl.(26), bzw. mit $\varphi=0$ folgt aus Gl.(28)

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L_S} = 0.$$

Daraus ergibt sich die Resonanzfrequenz ω_0 zu

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_S C}}. \quad (29)$$

Ermittlung von ω_r und Y_{\min}

Wird von der Gl.(27) die erste Ableitung gebildet und

$$\frac{dY}{d\omega} = 0$$

gesetzt, dann erhält man den Wert für ω_r . Die Ableitung führt zu einer allgemeinen Gleichung vierten Grades. Für den Fall, dass $G_P=0$ ist und keine Leitfähigkeitsverluste ($\kappa=0$) vorhanden sind, kann diese Gleichung in eine quadratische Gleichung überführt werden. Die Lösung dieser Gleichung ergibt für ω_r den Wert

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{L_S C} \cdot \frac{\cos \delta_C}{\cos \delta_L}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\cos \delta_C}{\cos \delta_L}} \quad (30)$$

Durch Kombination von Gl.(30) und Gl.(27) entsteht

$$Y_{\min} = \sqrt{\frac{C}{L_S} \cdot \frac{2(1 - \cos(\delta_C + \delta_L))}{\cos \delta_C \cdot \cos \delta_L}} \quad (31)$$

Bild 8 zeigt den Verlauf der Resonanzfrequenz ω_r in Abhängigkeit von den Resonatorverlusten $\tan \delta_C + \tan \delta_L$. Es ist deutlich zu erkennen, dass ω_r bei Resonatorverlusten $>0,01$ nicht nur von L und C bestimmt wird, sondern auch von deren Verlusten.

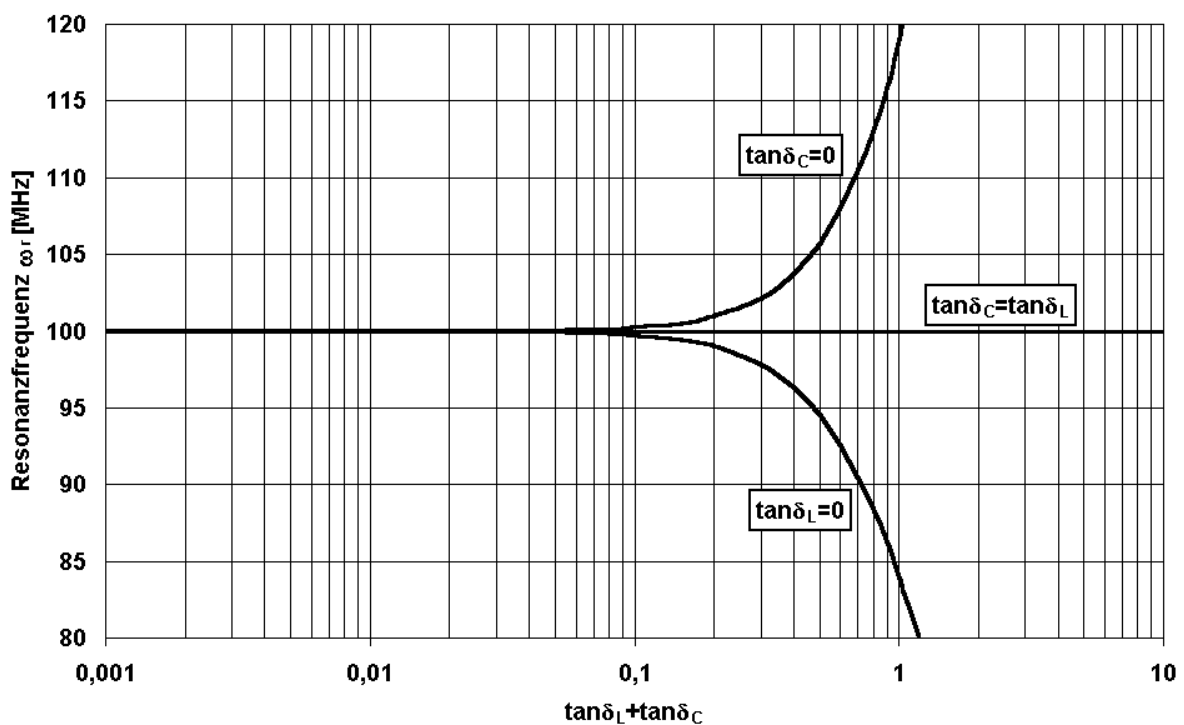


Bild 8: Resonanzfrequenz ω_r in Abhängigkeit von den Resonatorverlusten

Ermittlung von ω_{ph}

Der Wendepunkt des Phasenfrequenzganges wird aus der zweiten Ableitung von Gl.(28) ermittelt. Mit

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = 0$$

erhält man die „Phasenresonanzfrequenz“ ω_{ph} , die für $G_p=0$ und $\kappa=0$ (keine Leitfähigkeitsverluste) den Ausdruck

$$\omega_{ph} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \tan\delta_c \tan\delta_L + \sqrt{(\tan\delta_c \tan\delta_L - 1)^2 + 3(1 + \tan^2\delta_c)(1 + \tan^2\delta_L)}}{3(1 + \tan^2\delta_c)}} \quad (32)$$

annimmt.

Bild 9 zeigt den Verlauf der Phasenresonanzfrequenz ω_{ph} in Abhängigkeit von den Resonatorverlusten $\tan\delta_c + \tan\delta_L$. Auch hier wird deutlich, dass ω_{ph} bei Resonatorverlusten $>0,01$ immer stärker von der Resonanzfrequenz ω_0 abweicht und außerdem bei $\tan\delta_c = \tan\delta_L$ im Gegensatz zu ω_r nicht gleich ω_0 ist.

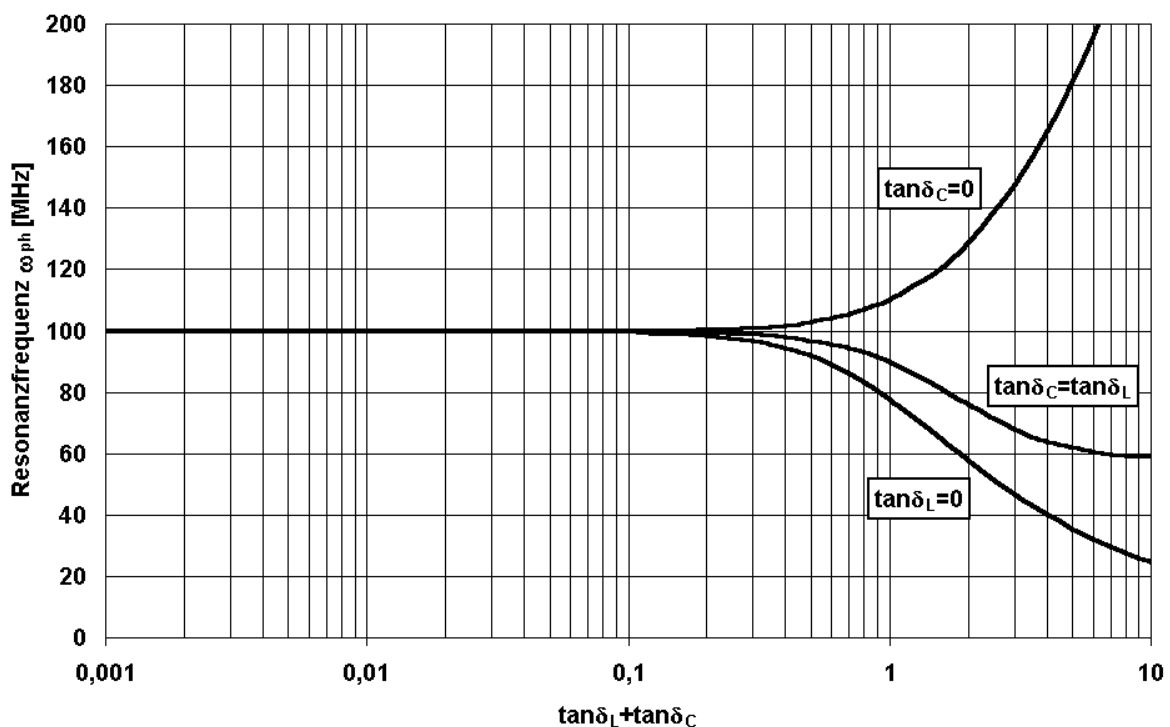


Bild 9: Phasenresonanzfrequenz ω_{ph} in Abhängigkeit von den Resonatorverlusten

Gütedefinitionen

Neben der Definition der zwei Resonanzfrequenzen ω_r und ω_{ph} , können auch zwei Resonatorgüten definiert werden.

a) Mit den Frequenzen ω_a und ω_b (s. Bild 4) wird die Resonatorgüte Q_{ab} analog Gl.(17) zu

$$Q_{ab} = \frac{\omega_{ab}}{\omega_b - \omega_a} = \frac{\sqrt{\omega_a \cdot \omega_b}}{\omega_b - \omega_a} \quad (33)$$

$$\omega_{ab} = \sqrt{\omega_a \cdot \omega_b}$$

definiert, wobei im Normalfall die Resonanzfrequenz ω_{ab} gleich der Resonanzfrequenz ω_r ist. Die Frequenzen ω_a und ω_b ermittelt man aus dem normierten Scheinleitwert Y_{min} Gl.(31) zu Y Gl.(27) und zwar, wenn

$$\frac{Y_{min}}{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist. Wiederum für den Fall $G_p=0$ und $\kappa=0$ erhält man für ω_a und ω_b die Werte

$$\omega_a = \sqrt{\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \quad (34)$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \quad (35)$$

$$p = 2 \frac{C(1 - \tan \delta_C \tan \delta_L) + L_S (Y_{min})^2}{L_S C^2 (1 + \tan^2 \delta_C)}$$

$$q = \frac{1}{(L_S C)^2} \cdot \frac{1 + \tan^2 \delta_L}{1 + \tan^2 \delta_C}$$

b) Aus der Steilheit des Phasenfrequenzganges bei der Phasenresonanzfrequenz ω_{ph} lässt sich eine „Phasengüte“ Q_{ph} definieren.

$$Q_{ph} = S_{ph} \cdot \omega_{ph} \quad (36)$$

$$S_{ph} = \frac{d\varphi}{d\omega} \quad \text{bei } \omega = \omega_{ph}$$

Ist $G_P=0$ und $\kappa=0$, dann ist

$$S_{ph} = \frac{2\omega_0(\tan\delta_C + \tan\delta_L)\omega_{ph}}{(\omega_{ph}^2 \tan\delta_C + \omega_0^2 \tan\delta_L)^2 + (\omega_{ph}^2 - \omega_0^2)^2} \quad (37)$$

Messtechnische Ermittlung von Resonanzfrequenzen und Resonatorgüten

Aus dem normierten (Spannungs)-Amplitudenfrequenzgang

$$\frac{U}{U_r} = \frac{Y_{min}}{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

lassen sich die Frequenzen ω_a und ω_b ermitteln. Die Resonanzfrequenz ω_{ab} und die Güte Q_{ab} werden nach Gl.(33) berechnet.

Aus der Nullstelle der zweiten Ableitung des Phasenfrequenzganges lässt sich ω_{ph} und aus der ersten Ableitung die Steilheit S_{ph} ermitteln. Die Phasengüte Q_{ph} wird nach Gl.(37) berechnet.

Die Kennresonanzfrequenz ω_0 erhält man beim Phasenwinkel $\varphi=0$.

Resonatorkennlinien

Mit der Messkapazität Gl.(4)

$$C_M = k\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r' = C_0 \cdot \varepsilon_r'$$

kann die Gesamtkapazität der Resonatoranordnung wie folgt errechnet werden

$$C = C_S + C_0 \cdot \varepsilon_r' \quad (38)$$

Mit den Verlusten der Messkapazität Gl.(21)

$$\tan\delta_{CM} = \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'} + \frac{\kappa}{\varepsilon_0 \varepsilon_r'} \cdot \frac{1}{\omega} = \tan\delta_\varepsilon + \kappa^* \cdot \frac{1}{\omega}$$

ergeben sich die kapazitiven Gesamtverluste der Resonatoranordnung zu

$$\tan\delta_C = \frac{C_S}{C} \tan\delta_{CS} + \frac{C_0 \cdot \varepsilon_r'}{C} \left(\tan\delta_\varepsilon + \kappa^* \cdot \frac{1}{\omega} \right) \quad (39)$$

Setzt man die Gleichungen (38) und (39) in den Ausdruck für den Betrag der Admittanz Y [Gl.(27)] und in den Ausdruck für die Phasenverschiebung φ [Gl.(28)], dann

können der Amplituden- und den Phasenfrequenzgang simuliert und die relevanten Resonator Kennwerte zur Darstellung der Resonator Kennlinien berechnet werden.

Folgende Abhängigkeiten können simuliert werden:

$$\omega_r = f(\varepsilon_r', \varepsilon_r'', \kappa) \quad \text{bzw.} \quad \omega_r = f(\varepsilon_r', \tan \delta_\varepsilon, \kappa^*)$$

$$\omega_{ab} = f(\varepsilon_r', \varepsilon_r'', \kappa) \quad \text{bzw.} \quad \omega_{ab} = f(\varepsilon_r', \tan \delta_\varepsilon, \kappa^*)$$

$$\omega_{ph} = f(\varepsilon_r', \varepsilon_r'', \kappa) \quad \text{bzw.} \quad \omega_{ph} = f(\varepsilon_r', \tan \delta_\varepsilon, \kappa^*)$$

$$Q_{ab} = g(\varepsilon_r', \varepsilon_r'', \kappa) \quad \text{bzw.} \quad Q_{ab} = g(\varepsilon_r', \tan \delta_\varepsilon, \kappa^*)$$

$$Q_{ph} = g(\varepsilon_r', \varepsilon_r'', \kappa) \quad \text{bzw.} \quad Q_{ph} = g(\varepsilon_r', \tan \delta_\varepsilon, \kappa^*)$$

Simulationsbeispiele sind im Anhang zu finden.

Danksagung

Diese Arbeit ist im Rahmen eines Forschungsprojektes zur Materialfeuchte entstanden. Wir danken dem Thüringer Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kultur für die finanzielle Unterstützung sowie allen Mitarbeitern, die an der Durchführung des Projektes beteiligt waren.

Literaturverzeichnis

- [1] Zinke, O., Brunswig, H.: Hochfrequenztechnik 1. Springer-Verlag, Berlin, 1995
- [2] Kummer, M.: Grundlagen der Mikrowellentechnik. Verlag Technik, Berlin, 1989

Anhang

Simulationsbeispiele

