



DEUTSCHE
GESELLSCHAFT FÜR
ZERSTÖRUNGSFREIE
PRÜFUNG E.V.

ZfP-Sonderpreis der DGZfP beim Landeswettbewerb Jugend forscht

SCHÜEX NORDRHEIN-WESTFALEN

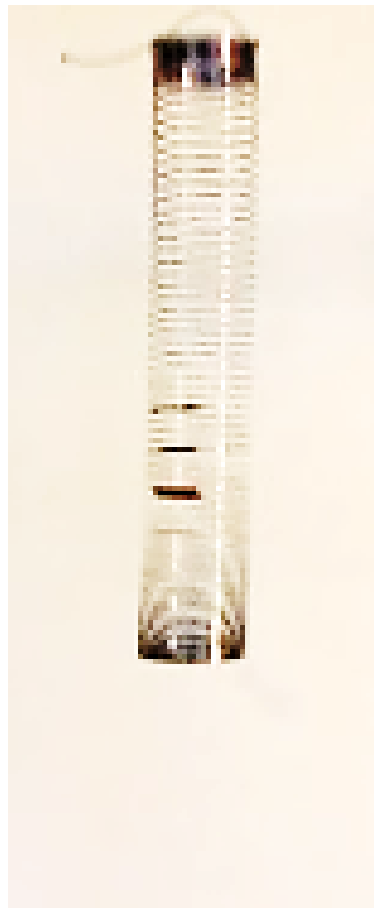


Physikalische Betrachtungen zum
Fallverhalten von Federn

Sophie Atzpodien

Schule:
Gymnasium St. Mauritz

Jugend forscht 2014



Physikalische Betrachtungen zum Fallverhalten von Federn

Sophie Atzpodien, Gymnasium St. Mauritz

Betreuender Lehrer: Herr Dr. Altmeyer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	2
Das Zwei-Körper-System als Modell für das Slinky	3
Kräftemodellierung	3
Die mathematische Modellierung des Zwei-Körper-Problems	4
Von der Kraft zur Strecke	4
Die Einwirkung der vorherigen Beschleunigungen	5
Verbesserte Definition der Variable t	6
Das senkrechte Zwei-Körper-Problem	6
Die Anfangs- und Endbedingungen der Simulation	8
Ergebnisse der Simulation und Vergleich mit den gemessenen Daten	8
Auswertung der durch die Analyse generierten Werte	8
Analyse der durch die Messung des Zwei-Körper-Systems erhobenen Daten.....	10
Wie habe ich die Daten erhoben?.....	10
Ergebnisse	10
Übertragung der Thesen auf das Slinky	12
Kraftmodell	12
Anfang	12
Fall.....	12
Wie funktioniert die Veränderung der Federkraft?	13
Experimentelle Überprüfung des Modells	14
Messung der Wellengeschwindigkeit im Slinky	14
Auswertung des Diagramms	14
Messung der Fallgeschwindigkeit des oberen Slinkyendes	16
Vergleich der Geschwindigkeiten	17
Physikalische Betrachtungen zur Wellengeschwindigkeit in Federn	17
Modellierung; Wie ist das Phänomen mathematisch bedingt?	19
Überprüfung	20
Ausblick, Quellen und Material	21

Einleitung

Komplexe physikalische Phänomene verbergen sich oft hinter einfach scheinenden Abläufen, welche fast spielerisch anmuten. So gilt das Slinky, dessen Verhalten ich in dieser Arbeit unter physikalischen Gesichtspunkten betrachten möchte, oft lediglich als Kinderspielzeug. Dabei stellt es, unter physikalischen Gesichtspunkten betrachtet, eine Feder mit besonderen Eigenschaften dar. So ist es elastisch aus vielen einzelnen, in Reihe geschalteten, Windungen zusammengesetzt, welche sich wie einzelne Federn mit den gleich großen Federkonstanten D_1 bis D_n verhalten. Doch sind diese Abschnitte bei einer herkömmlichen Feder hart, so sind diese beim Slinky weich und die gesamte Feder nach $\frac{1}{D_{ges}} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} \dots + \frac{1}{D_n}$ umso weicher.

Dies führt nicht nur dazu, dass das Eigengewicht des Slinkys schon eine deutliche Ausdehnung der Federn bewirkt: eine weitere Auswirkung zeigt sich in der deutlichen Beobachtbarkeit von longitudinalen Wellenerscheinungen, beispielsweise beim Ausrichten des Systems zur Schwerkraft.

Hängt man es auf diese Weise an einem Ende orthogonal zum Boden auf, so ist etwas Ungewöhnliches zu beobachten: Lässt man den obersten Ring los und die gesamte Spirale somit fallen, stürzen nicht alle Ringe gleichzeitig und das Slinky als zusammenhängender Körper in die Tiefe; vielmehr ziehen sich Ring für Ring nacheinander zusammen, während das untere Ende in der Luft stehen zu bleiben scheint. Ist das Slinky so in den entspannten Zustand übergegangen, fällt es schließlich zur Erde – ein Verhalten, was ich im Laufe der Arbeit oft als „Slinky-Phänomen“ bezeichnen werde.

Doch wieso scheint das Slinky der Gravitation zu trotzen? Der Schlüssel zum Verständnis des Phänomens liegt in den Eigenschaften, welche das Slinky so besonders machen, und in ihrem komplexen Zusammenspiel mit den wirkenden Kräften. Daher habe ich, wie es in den Naturwissenschaften oft getan wird, das Slinky erst auf eine Modell-Spirale reduziert. Dieses Zwei-Körper-System ermöglicht es mir nun, den Einfluss von Faktoren wie Masse und Ausdehnung auf einen physikalisch einfacheren Fall zu festzustellen, welchen ich später mit dem Slinky vergleichen und daraus auf die auf das Slinky wirkenden Faktoren schließen kann.

Denn an welchen Eigenschaften des Slinkys ist es festzumachen, dass es so anders fällt als eine Feder? Inwiefern beeinflussen Federkonstante, Masse und Ausdehnung den Fall der „Treppenspirale“? Und ist ein Zusammenhang mit Wellenphänomenen belegbar?

Es sollen nicht nur physikalische Betrachtungen über das Phänomen und die mit ihm verknüpfte Ursache gemacht werden, sondern auch eine Analyse der Faktoren, welche die Ursache beeinflussen. Um die volle physikalische Schönheit, welche sich in dem so schlicht wirkenden Phänomen verbirgt, zu erfassen.

Da das hängende Slinky durch seine unregelmäßige Massenverteilung und Ausdehnung zu Anfang noch ein sehr komplexes System darstellt, vereinfache ich es zunächst auf ein Zwei-Körper-System. Dieses besteht aus einer normalen, sich gleichmäßig ausdehnenden Feder, an deren Enden zwei Massenstücke befestigt worden sind. Mache ich es nun wie das Slinky an einem Stativ fest, so sorgt die untere Masse allein für die Ausdehnung der Feder, da ihr Eigengewicht nur wenige Gramm beträgt und somit vernachlässigt werden kann. Durch das Modell ist es daher einfach, den Einfluss von Faktoren wie Masse und Ausdehnung auf fallende Federn zu untersuchen und besser zu verstehen, wie Spannkraft und Gewichtskraft zusammenwirken.

Das Zwei-Körper-System als Modell für das Slinky

Lässt man das Zwei-Körper-System fallen, so beginnt die Feder, die gespeicherte Spannenergie $E_{sp} = \frac{1}{2} * D * x^2$ und potentielle Energie $m * g * h$ freizusetzen und in kinetische Energie umzuwandeln. Dies geschieht auf Kräfteebene, da die zum Schwerpunkt wirkende Spannkraft F_{sp} die beiden Massen nach $F = m * a$ beschleunigt. Gleichzeitig wirkt die Gewichtskraft F_g gleichmäßig auf beide Massen, was zur Folge hat, dass sich die Beschleunigung der Massen noch einmal verändert, da sich in entgegengesetzte Richtungen arbeitende Kräfte teilweise ausgleichen, während sich in dieselbe Richtung wirkende Kräfte aufaddieren.

So geschieht es auch hier. Denn werden beide Massen von ihrer Gewichtskraft nach unten gezogen, so beschleunigt sie ihre Spannkraft zum Schwerpunkt des Systems hin – welcher unterhalb des oberen, aber über dem unteren Massestück liegt.

Daher wirken F_{Sp} und F_G in gegensätzlichen Richtungen auf die untere Masse, was dazu führt, dass sie sich ausgleichen. Denn die gesamte Ausdehnung des Systems und somit die Spannkraft, welche auf die Massen wirkt, wird von der Gewichtskraft des unteren Massestücks hervorgerufen, was bedeutet, dass zu Anfang F_G (untere Masse) = F_{Sp} gilt und die Differenz der beiden Kräfte, die Gesamtkraft, welche auf die untere Masse wirkt, gleich null ist. Das Gegenteil trifft auf die obere Masse zu: die sie beschleunigende Kraft F_G (obere Masse) + F_{Sp} = F_G (obere Masse) + F_G (untere Masse) vervielfacht sich abhängig von dem Verhältnis zwischen den beiden Massen.

Zu Anfang des Phänomens gilt:

$$F_{(m1)} = F_G(m1) + F_G(m2)$$

$$F_{(m2)} = F_G(m2) - F_{Sp(m2)} = F_G - F_G(m2)$$

Doch dieses Gleichgewicht währt nur kurz. Durch die Beschleunigungsdifferenz zwischen den Massen verkürzt sich die Feder sofort. Und da die Größe der Spannkraft von der Ausdehnung der Feder proportional abhängig ist, so verkleinert sich auch die Spannkraft, je stärker, desto größer die Strecke ist, welche die obere Masse im ersten Zeitabschnitt zurückgelegt hat. Da die Spannkraft allerdings auf beide Massen wirkt, wird nicht nur die Beschleunigung der oberen Masse kleiner, sondern die Beschleunigung der unteren Masse zum Boden hin größer, da die Spannkraft nun nicht mehr so groß wie die Gewichtskraft ist. Dieses Verhalten wiederholt sich kontinuierlich, die Beschleunigung der oberen Masse wird also immer kleiner und die der unteren Masse immer größer, bis sich die Feder vollständig zusammengezogen hat und auf beide Körper nur noch die Gewichtskraft wirkt.

Beim Fall des Systems gilt:

$$F_G(m1) < F_{(m1)} < F_G(m1) + F_G(m2)$$

$$F_G(m2) - F_G(m2) < F_{(m2)} < F_G(m2)$$

Je mehr Zeit vergangen ist, desto mehr nähern sich $F_{(m1)}$ und $F_{(m2)}$ $F_G(m1)$ und $F_G(m2)$ an.

Am Ende des Phänomens gilt:

$$F_{Sp} = 0$$

$$F_{(m1)} = F_G(m1)$$

$$F_{(m2)} = F_G(m2)$$

Um das von dieser Kräftenmodellierung vorausgesagte Fallverhalten mit dem realen Fallverhalten zu vergleichen, muss jetzt nur noch eine Gleichung formuliert werden, welche aus messbaren Größen wie Federkonstante und Ausdehnung die einzelnen Positionen der Massen während des Falls errechnet. Dazu müssen diese Größen erst einmal durch Variablen definiert werden, damit sie in die Formel eingebracht werden können.

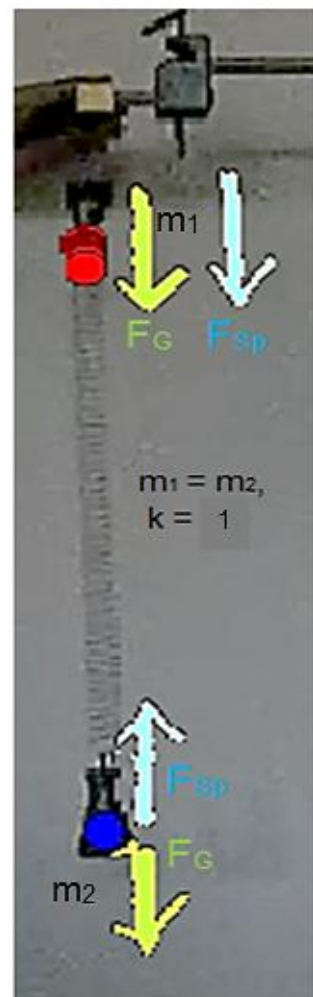


Abbildung 1: Die Kräfte im Zwei-Körper-System.

Hat das Zwei-Körper-System noch nicht zusammengezogen, zu fallen, so wirken bei gleichen Massen (Massenquotient $k = 1$), auf die obere Masse die doppelte Gewichtskraft und auf die untere Masse keine Kräfte.

Die mathematische Modellierung des Zwei-Körper-Problems

Wird das Zwei-Körper-System um eine bestimmte Länge x ausgelenkt, so ergibt sich die neue Länge l aus x und der Eigenlänge h . Die Ausdehnung der Feder sorgt dabei innerhalb des Zusammenhangs $F_{sp} = D \cdot x$ für das Wirken der Federkraft, welche alle Federringe in Richtung des Systemschwerpunkts beschleunigt. Nun gilt es, durch die mit der Kraft verbundenen Größen x und der Federkonstante die in einem Zeitbruchteil zurückgelegte Strecke der beiden Massen zu berechnen. Diese Massen werden dabei durch ihr Verhältnis zueinander definiert und unterschieden. So wird der Körper m_2 als km_1 bezeichnet; der Faktor k steht dabei für den Quotienten der beiden Massen ($k = \frac{m_2}{m_1}$).

Von der Kraft zur Strecke

Setzt man diese Kräfte nun in den Zusammenhang zwischen Beschleunigung und Kraft sowie Masse ein, $a = F/m$, so erhält man für die beiden Massen m_1 und km_1 folgende Gleichungen:

$$a_{m_1} = \frac{Dx}{m_1}$$

$$a_{km_1} = \frac{Dx}{km_1}$$

Um nun auf den Weg schließen zu können, welche diese Massen in einem bestimmten Zeitbruchteil zurücklegen und somit schließlich das Phänomen zu rekonstruieren, so muss zunächst die Annahme gemacht werden, dass die Kraftänderung auf kleinster Zeitskala so gering ist, dass hier von einer für kurze Zeit gleichförmig beschleunigten Bewegung ausgegangen werden kann. Somit kann die Formel für die Beschleunigung der Masse wiederum in die Beschreibung der Abhängigkeit einer zurückgelegten Strecke von der Beschleunigung des Körpers und der benötigten Zeit ($s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$) eingebunden werden.

Dadurch ergibt sich:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$a_{m_1} = \frac{Dx}{m_1} \quad \vee \quad a_{km_1} = \frac{Dx}{km_1}$$

$$s_{m_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{Dx}{m_1}\right) \cdot t^2 \quad \vee \quad s_{km_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{Dx}{km_1}\right) \cdot t^2$$

Und diese Strecken, die das Ergebnis der Gleichung darstellen, wirken ebenfalls auf die Größe der wirkenden Kraft ein. Denn verkürzt sich die Feder aufgrund des beschriebenen Zusammenhangs zwischen Kraft und Ausdehnung im ersten Zeitabschnitt um eine bestimmte Strecke, so verkleinert diese Strecke aufgrund desselben Zusammenhangs die im nächsten Zeitabschnitt wirkende Kraft. Somit wird die Strecke, welche von einer Masse in einem Zeitraum zurückgelegt wird, von allen vorherigen Vorgängen beeinflusst, welche die Federausdehnung verkleinert haben. Übertragen auf die mathematische Modellierung bedeutet dies, dass die in der in einer weiteren zurückgelegten Strecke resultierenden Beschleunigung enthaltende momentane Ausdehnung als Differenz der Summe aller vorher zurückgelegten Strecken und der ersten Ausdehnung x geschrieben werden müssen. Daher lautet der neue Zusammenhang:

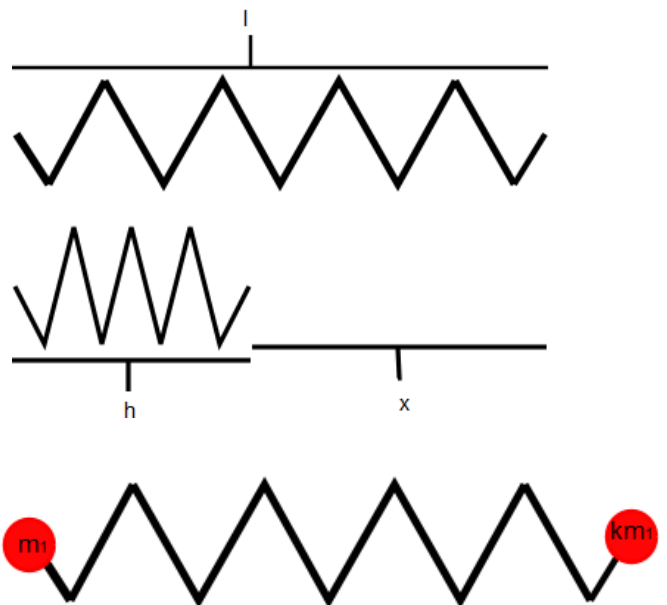


Abbildung 2: Das Zweikörpersystem in der Modellvorstellung

$$S_{n,m1} = \frac{1}{2} * \left(\frac{D(x - (\sum_0^{q=n-1} (s_{q,m1} + s_{q,km1})))}{m1} \right) * t^2 \text{ bzw. } S_{n,km1} = \frac{1}{2} * \left(\frac{D(x - (\sum_0^{q=n-1} (s_{q,m1} + s_{q,km1})))}{km1} \right) * t^2$$

Dabei bedarf es für diesen einer neuen Variable, welche jedem Streckenabschnitt den Zeitraum zuordnet, in welchem er zurückgelegt wurde. Denn wie können „alle vorherigen Strecken“ summiert werden, wäre nicht bekannt, auf welchen Zeitabschnitt sich die zu errechnende Strecke bezieht? So wird s, wie im Index erkennbar, nicht nur von m1, sondern ebenfalls von n, der „Nummer“ des zugehörigen Zeitabschnitts, abhängig gemacht.

Dies führt dazu, dass sich die Summe nun auf „alle Summen der Strecken beider Massen, welche zwischen dem Anfang des Phänomens (n = 0) und dem letzten Zeitabschnitt vor dem aktuellen Zeitraum (n – 1) zurückgelegt worden sind“, beziehen kann. Denn eine Summenvorschrift bewirkt, dass der hinter dem Summenzeichen - Sigma befindliche Term so lange mit sich selbst addiert wird, bis q, der Zeitindex, welcher in der Summe Verwendung findet, von 0 zu n – 1 übergegangen ist. So werden alle in Zeiträumen zwischen null und n – 1 zurückgelegten Strecken beider Massen summiert – um schließlich aus ihnen und der erstmaligen Ausdehnung der Feder x die Differenz zu bilden.

Die Einwirkung der vorherigen Beschleunigungen

Doch da die bloße Änderung der Strecke nicht das einzige ist, was den Übergang von einem Zeitabschnitt zum anderen prägt, muss die Formel erneut modifiziert werden. So bleibt von vorherigen Beschleunigungen, wie vom Trägheitsgesetz beschrieben, die Endgeschwindigkeit erhalten; sie summiert sich im Laufe des Vorgangs mit den anderen Endgeschwindigkeiten weiterer Beschleunigungen zu einer immer größer werdenden Zahl auf, welche neben den neuen, immer kleiner werdenden Beschleunigungen auf die Masse wirkt. Sie wird nach der Gesetzmäßigkeit für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen zu dem schon formulierten Teil hinzugezählt:

$$S_{n,m1} = \frac{1}{2} * \left(\frac{D(x - (\sum_0^{q=n-1} (s_{q,m1} + s_{q,km1})))}{m1} \right) * t^2 + v * t \text{ v } S_{n,km1} = \frac{1}{2} * \left(\frac{D(x - (\sum_0^{q=n-1} (s_{q,m1} + s_{q,km1})))}{km1} \right) * t^2 + v * t$$

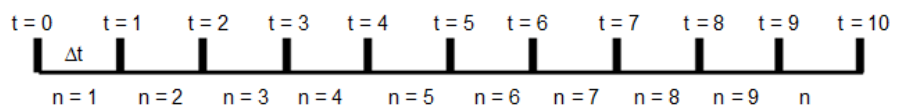
Und da es sich bei dieser Geschwindigkeit wie auch bei den verkürzenden Strecken um die Summe aller vorherigen Geschwindigkeiten handelt, so wird für die korrekte Ausarbeitung wiederum eine Summenformel benötigt. Daher handelt es sich bei der aus diesem Gedanken hervorgehenden Formulierung weniger um die obenstehende Formel als um

$$S_{n,m1} = \frac{1}{2} * \left(\frac{D(x - (\sum_0^{q=n-1} (s_{q,m1} + s_{q,km1})))}{m1} \right) * t^2 + (\sum_0^{q=n-1} (t_q * a_q)) * t \text{ und}$$

$$S_{n,km1} = \frac{1}{2} * \left(\frac{D(x - (\sum_0^{q=n-1} (s_{q,m1} + s_{q,km1})))}{km1} \right) * t^2 + (\sum_0^{q=n-1} (t_q * a_q)) * t.$$

Verbesserte Definition der Variable t

Doch wie genau ist die Zeitvariabel t definiert? Bezeichnet sie einen Zeitraum oder eine Zeitdauer?



In der Modellvorstellung wird das Phänomen in viele Zeitabschnitte

aufgeteilt, welche durch n nummeriert werden. Diese Zeiträume werden wiederum innerhalb der Formel mit der Geschwindigkeit beziehungsweise als Quadrat mit der Hälfte der Beschleunigung multipliziert. man errechnet hierbei, wie viel Strecke s in einem bestimmten Zeitfenster zurückgelegt wird. Doch grundsätzlich wird t nicht als Bezeichnung eines Abschnitts eingesetzt - sondern eher als Quantifizierung eines Zeitpunktes,

welcher gleichzeitig für die gesamte Zeitdauer von Beginn des Experiments ($t = 0$) bis zum jetzigen Zeitpunkt steht. Um zwischen der gewünschten und der allgemeinen Definition von t unterscheiden zu können, werde ich den Zeitabschnitt, in welchem zu Zwecken der Vereinfachung eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung angenommen wird, als Δt_n bezeichnen. Dabei wird das n gesetzt, da n als Nummerierung der Abschnitte Δt definiert ist – und somit sichergestellt werden soll, dass das passende Δt der Strecke s_n zugeordnet wird. Dies sowie die Definition von n wird noch deutlicher, setzt man Δt aus zwei t -Werten, also $t_n - t_{n-1}$ zusammen. So ergibt sich für die Formulierung der Formel:

$$s_{n,m1} = \frac{1}{2} * \left(\frac{D \left(x - \left(\sum_0^{q=n-1} (s_{q,m1} + s_{q,km1}) \right) \right)}{m1} \right) * (t_n - t_{n-1})^2 + \left(\sum_0^{q=n-1} ((t_q - t_{q-1}) * a_q) \right) * (t_n - t_{n-1})$$

$$s_{n,km1} = \frac{1}{2} * \left(\frac{D \left(x - \left(\sum_0^{q=n-1} (s_{q,m1} + s_{q,km1}) \right) \right)}{km1} \right) * (t_n - t_{n-1})^2 + \left(\sum_0^{q=n-1} ((t_q - t_{q-1}) * a_q) \right) * (t_n - t_{n-1})$$

Das senkrechte Zwei-Körper-Problem

Doch diese Formel beschreibt das Verhalten von zwei waagrecht zur Erdoberfläche ausgerichteten Massen, welche durch eine Feder miteinander verbunden sind - und beschreibt somit keinerlei Einwirkung durch Gewicht- oder Gravitationskraft. Dies wäre irrelevant, würde sich das Slinky-Phänomen, dessen Ergründung den Kern meiner Arbeit bildet, nicht fallend abspielen. Die zugehörige Fragestellung ergibt sich somit aus dem Fallverhalten der weichen Feder, nicht aus ihrem Verhalten bei der bloßen Ausdehnung und Entspannung. Daher muss auch beim Zwei-Körper-Problem davon ausgegangen werden, dass die mithilfe von Massen an beiden Enden beschwerte Feder zunächst, an einem Ende befestigt, orthogonal zur Erdoberfläche aufgehängt wird. Ihr Verhalten wird nun während dem Fall des Systems beobachtet. Daher muss ebenfalls die mathematische Simulation verändert werden, um vergleichbare Werte zu erbringen.

Was prägt eine solche Fallbewegung also? Anders als bei der Beschleunigung der Massen durch die Federkraft, bei welcher die aus der Beschleunigung resultierende Bewegung zu einer wiederum veränderten Beschleunigung führte, handelt es sich bei der beim Fall auf beide Massen wirkende Gewichtskraft F_G um eine im Experiment konstante Kraft, welche lediglich von den hier unverändert bleibenden Größen Masse und Fallbeschleunigung g proportional beeinflusst wird.

Berücksichtigt man diese Kraft schon am Anfang der Rechnung, welche zu der obenstehenden Formel geführt hat, so ergibt sich folgendes:

$$F_{Sp,m1} = -Dx \quad \vee \quad F_{Sp,km1} = Dx$$

$$F_{G,m1} = -m_1g \quad \vee \quad F_{G,km1} = -km_1g$$

$$F_{ins} = -m_1g - Dx \quad | \quad F = m_1 * a$$

$$\vee \quad F_{ins} = -km_1g + Dx \quad | \quad F = km_1 * a$$

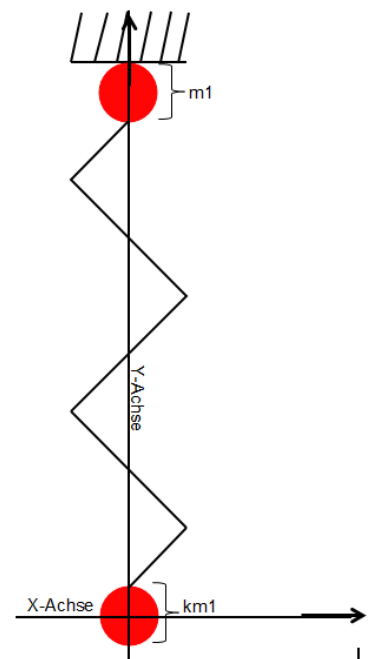


Abbildung 3: Die Position des Systems im Koordinatensystem.

Um darstellen zu können, dass Kräfte in unterschiedliche Richtungen wirken, müssen X- und Y-Richtung festgelegt werden. Zur Vereinfachung der Rechnung mit den Koordinaten lege ich das System auf die Y-Achse und wähle die Einheit 1E= 1 Meter, die der Einheit in den Rechnungen entspricht.

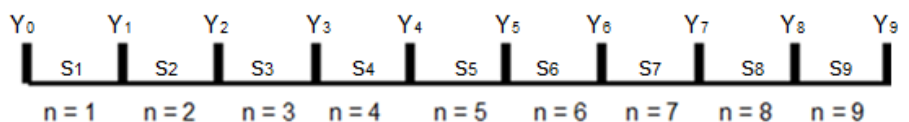
$$m_1 * a = -m_1 g - Dx \quad | * \frac{1}{m_1} \quad \vee \quad m_1 * a = -km_1 g + Dx \quad | * \frac{1}{km_1}$$

$$a = -g - \frac{Dx}{m_1} \quad \vee \quad a = -g + \frac{Dx}{km_1}$$

Dabei müssen bei den Kräften erstmals Vorzeichen gesetzt werden, um nach der in der oberen Abbildung dargestellten Festlegung der Achsen zu betonen, in welche Richtung die Kräfte wirken. So wird die obere Masse durch beide Kräfte in dieselbe Richtung beschleunigt, da sich der Schwerpunkt des Systems, zu welchem die Federkraft hin wirkt, auf der Wirkungslinie der Gewichtskraft befindet. So addieren sich beide Beschleunigungen zu einer größeren, anfänglich doppelt so großen Beschleunigung auf, da die Ausdehnung der Feder ja durch die Gewichtskraft bedingt ist. Somit gilt am Anfang des Phänomens $F_G = F_{Sp}$.

Doch anders als bei dem „waagerechten“ Zwei-Körper-System verkompliziert sich in diesem Falle die Formulierung noch dadurch, dass nicht alle Bewegungen der Massen zum Schwerpunkt hin erfolgen und somit die Feder verkürzen. So wirkt die Gewichtskraft zumindest bei der unteren Masse km_1 vom Schwerpunkt des Systems weg, in Richtung Erdmittelpunkt – was dazu führt, dass die resultierende Strecke die Feder zwar nicht ausdehnt, da das gesamte System ja mit der gleichen Beschleunigung fällt, sie aber auch nicht verkürzt. Dies würde, würden die neu formulierten Beschleunigungen lediglich in die alte Formel eingesetzt werden, welche eine Summierung der Ausdehnungen beinhaltet, allerdings nicht berücksichtigt; und wie sollte mathematisch dargestellt werden, dass für die zweite Größe keine negativen Zahlen miteinbezogen werden sollen?

Somit ergeben sich zwei Möglichkeiten, die Formel zu verändern: Als erste Methode käme in Frage, die Erdanziehung für die Berechnung der Federausdehnung voll und ganz zu vernachlässigen, da diese die Feder ja auf einer Seite um den Betrag staucht, um welchen sie sie auf der anderen Seite ausdehnt und dementsprechend keine Auswirkung erzielt. Des Weiteren bietet sich an, die errechneten Strecken des ersten Zeitabschnitts zu der vorherigen Y-Koordinate der entsprechenden Masse hinzuaddieren (dies ist möglich, da die Einheit im Koordinatensystem der der Werte entspricht - die Strecken werden in Metern angegeben) und dann die Differenz aus beiden Koordinaten zu nehmen, um die aktuelle Länge der Feder zu erhalten. Subtrahiert man von dieser wiederum die Eigenlänge, so erhält man die Ausdehnung am Ende des vorherigen Zeitabschnittes, welche als die momentane Ausdehnung in die Formel einfließen kann. Dieses Vorgehen vereinfacht die Rechnung, da es die Summe aus allen vorhergegangenen Strecken überflüssig macht; so sind diese schon in der Y-Koordinate der Masse enthalten. Und da diese ohnehin für den Vergleich mit den experimentell erhobenen Daten, für die Auswertung, benötigt werden, hält dieses Verfahren noch weitere Vorteile bereit.



Somit muss die Formel unter Einführung einer neuen Größe, der Y-Koordinate Y , abhängig von der Nummer des Zeitabschnitts n und der Masse m_1 oder km_1 , erneut verändert werden. Dadurch ergibt sich:

Abbildung 4: Das Verhältnis von s , n , und Y .

Pro Zeitabschnitt wird zu der Koordinate am Anfang des Abschnitts die während des Abschnitts zurückgelegte Strecke s hinzugerechnet. So ergibt sich die Koordinate am Ende des Zeitabschnitts n , dessen Nummer diese trägt. Beispiel: $Y_0 + s_1 = Y_1$

$$s_{n,m_1} = \frac{1}{2} * \left(-g - \frac{D \left(\left((Y_{n-2,m_1} + s_{n-1,m_1}) - (Y_{n-2,km_1} + s_{n-1,km_1}) \right) - h \right)}{m_1} \right) * (t_n - t_{n-1})^2 + \left(\sum_0^{q=n-1} ((t_q - t_{q-1}) * a_q) \right) * (t_n - t_{n-1})$$

$$s_{n,km1} = \frac{1}{2} * \left(-g - \frac{D \left((Y_{n-2,m1} + s_{n-1,m1}) - (Y_{n-2,km1} + s_{n-1,km1}) \right) - h}{km1} \right) * (t_n - t_{n-1})^2 + \left(\sum_0^{q=n-1} ((t_q - t_{q-1}) * a_q) \right) * (t_n - t_{n-1})$$

Dabei gilt: $Y_{n-2,m1} + s_{n-1,m1} = Y_{n-1,m1}$ beziehungsweise $Y_{n-2,km1} + s_{n-1,km1} = Y_{n-1,km1}$.

Die Anfangs- und Endbedingungen der Simulation

Wie schon in der anfänglichen Kräftenmodellierung beschrieben, endet der Prozess, wenn sich die Feder vollkommen zusammengezogen hat und $F_{Sp} = 0$ ist. Daher muss, wird die Formel zu Zwecken der Simulation in ein Tabellenkalkulationsprogramm wie Excel eingesetzt, für jeden Zeitabschnitt der Faktor der Spannkraft mitberechnet werden, welcher null beträgt, hat die Feder ihren Ruhezustand erreicht. Da die Massen konstant sind, findet sich dieser in der Beschleunigung $\left(\frac{D \left((Y_{n-2,m1} + s_{n-1,m1}) - (Y_{n-2,km1} + s_{n-1,km1}) \right) - h}{km1} \right)$. Ist diese null oder negativ, so kann die Simulation enden.

Der Anfang des Phänomens ist lediglich dadurch bestimmt, dass alle gegebenen Größen in die Formel eingesetzt werden und die während „n-1“ zurückgelegte Strecke null und die Ausgangskordinaten $Y_{0,m1}$ und $Y_{0,km1}$ 0,368 und 0 betragen ($Y_{0,m1} - Y_{0,km1} = \text{Länge } l \text{ des ausgedehnten Systems (0,368 m)}$)

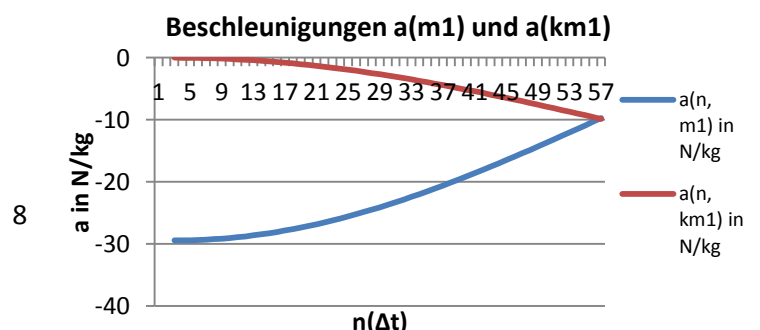
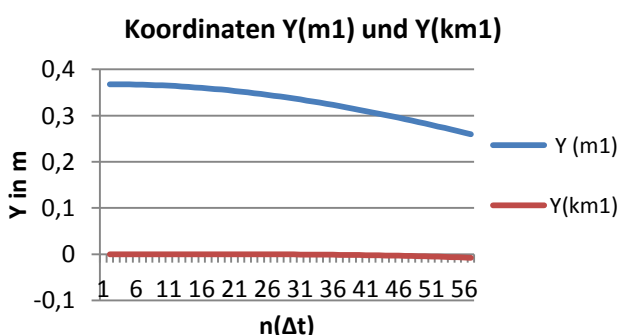
Ergebnisse der Simulation und Vergleich mit den gemessenen Daten

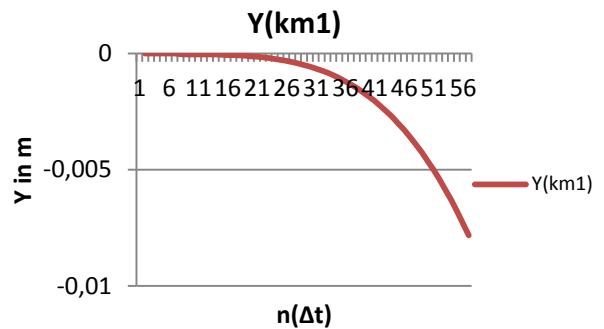
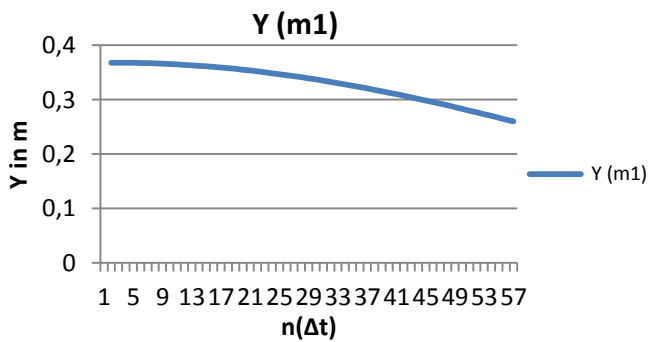
Auswertung der durch die Simulation generierten Werte

Erhebt man Daten über die Eigenschaften des Systems wie die Federkonstante des Slinkys und die Masse der beiden Gewichtsstücke und setzt diese in die Formel ein, so erhält man Schritt für Schritt die Koordinaten, an welchen sich die Masse zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet. Dabei ist es wichtig, die Zeitabschnitte so kleinschrittig einzuteilen, dass sie die Daten nicht verfälschen. Denn nimmt man an, Δt entspräche einer Sekunde und die Massen würden sich eine Sekunde lang wie in einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung verhalten, so unterscheidet sich das Ergebnis deutlich von dem realen Phänomen, da dieses sich in Bruchteilen einer Sekunde abspielt. Zudem muss darauf geachtet werden, dass das in der Simulation verwendete Δt mit dem Abstand zwischen den Messpunkten am realen Versuch übereinstimmt. Diese kommen durch die Bildrate der Kamera zustande, mit welcher ich das Phänomen aufgenommen habe. Denn übertrage ich den Film in das Programm measureDynamics, welches die Y-Koordinaten der Objekte aufzeichnet, so werden die Massen auf jedem Bild gesucht und lokalisiert; zwischen den Bildern, so wird angenommen, wird die Bewegung gleichmäßig fortgesetzt. Da die Bildrate der Kamera und somit des Films 600 fps (Fotos pro Sekunde) beträgt, nehme ich also $\frac{1}{600}$ s als Δt an.

Gegeben sind also: $m_1 = 0,01$ kg, $k = 2$, $l = 0,368$ m, $h = 0,271$ m, $x = 0,097$ m, $g = 9,81$ m/s² und $D = m_1 * k * g / x = 20,2268$ N/m, $\Delta t = \frac{1}{600}$ s.

Auf diese Weise erhalte ich folgende, in Form von Graphen dargestellte Ergebnisse:





Beobachtung: Die Simulation zeigt auf, dass die

Koordinaten der Masse km1 sich schon deutlich vor dem Ende des Phänomens ($l=h$) von dem Ausgangspunkt (0) entfernen und das vorausgesagte Verhalten somit nicht mit dem Slinky-Phänomen vereinbar ist. Denn dieses setzt einen vollkommenen Stillstand der unteren Endes (vergleichbar mit km1) bis zum Ende des Vorgangs voraus. Findet die im Diagramm erkennbare Abweichung der Masse zwar nur im Bereich eines Zentimeters statt, so stellt sie einen deutlichen mathematischen Trend dar, welcher sich auch in der Messung am realen Phänomen zeigen sollte und ausreicht, um das Slinkyphänomen von dem Fall des Zwei-Körper-Systems zu unterscheiden.

Zudem wird an den errechneten Daten deutlich, dass die zu Anfang dieses Kapitels getätigten Vermutungen bezüglich der Kraftentwicklungen zutreffend sind: betrachtet man das Diagramm „Beschleunigungen $a(m1)$ und $a(km1)$ “, so ist sichtbar, dass sich die beiden Beschleunigungen von entfernten Höhen symmetrisch auf einen Wert hinentwickeln, welcher knapp unter $9,81 \text{ m/s}^2$ liegt. Wieso handelt es sich dabei allerdings keinesfalls um $9,81$, sondern um $(-9,81)$, das negative Pendant zur Erdbeschleunigung?

Mag es sich bei negativen Beschleunigungen auch zumeist um einen Bremsvorgang handeln, so ist dies hier nicht der Fall. Denn an dieser Stelle steht das Vorzeichen vor dem Beschleunigungsbetrag für die Richtung, in welche diese wirkt. Und aus dem für die Rechnung verwendeten Koordinatensystem ergibt sich, dass die beschleunigenden Kräfte nach unten, ins Negative, zielen. Erst dadurch wird auch die erhaltene Strecke negativ und kann einfach zu der Ausgangskoordinate hinzuaddiert werden, um die neue Position der Massen zu erhalten.

So ist es ein Irrtum, die Beschleunigung der Masse m_1 aufgrund des Anstiegs ihrer Kurve im Diagramm für zunehmend zu halten. Tatsächlich wird dies dadurch hervorgerufen, dass sich der Betrag der Beschleunigung verkleinert. Der Graph stellt eine immer schnellere Stagnierung der Größe a_{m1} dar; hervorgerufen durch die zunehmend schneller voranschreitende Verkleinerung der Federkraft, welche von dem im Vergleich zu dem der unteren Masse schnelleren Fall von m_1 verursacht wird. Zugleich schlägt sich diese Verkleinerung der Federkraft auf die Beschleunigung der unteren Masse des Zwei-Körper-Systems, km1, nieder. Denn stellte F_{Sp} zu Anfang des Phänomens einen Ausgleich zu $F_{G(km1)}$ dar, so beginnt die Gewichtskraft mit dem Abnehmen der Spannkraft zu zunehmend größeren Anteilen zu wirken: $F_{ges(km1)}$ vergrößert sich – im gleichen Maße, in welchem sich $F_{ges(m1)}$ verkleinert, weswegen die von den Graphen geformte Figur achsensymmetrisch ist.

Auswertung: Entspricht die Simulation augenscheinlich dem Kräftemodell und sagt kein Slinky-ähnliches Verhalten voraus, so reicht das Modell nicht aus, um das Phänomen zu erklären. Doch liegt der dritte Faktor, welcher das Fallverhalten der weichen Feder zu beeinflussen scheint, in einem von dem System und dem Slinky selbst unabhängigen Grund wie einer nicht berücksichtigten Kraft, oder wirken die Eigenschaften des Slinky (beispielsweise die unregelmäßige Massenverteilung) bestimmend auf das Phänomen ein?

Überprüfung: Ich vergleiche die Simulationsergebnisse mit den am realen Fall des Zwei-Körper-Problems erhobenen Messwerten. Trifft die zweite These zu, so wird das „Slinky-Phänomen“ auch hier nicht auftreten. Trifft hingegen die erste These zu, so wird auch in den Messungsdaten zu beobachten sein, dass alle Windungen in der Luft verharren, bis sie von dem oberen Ende der Feder erreicht werden.

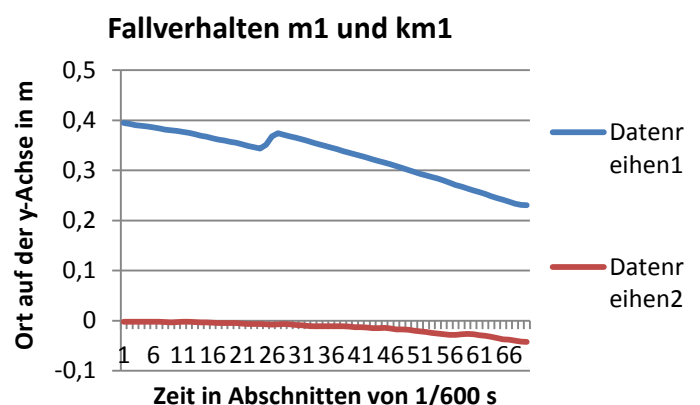
Analyse der durch die Messung des Zwei-Körper-Systems erhobenen Daten

Wie habe ich die Daten erhoben?

Nachdem ich den Fall des Zwei-Körper-Systems aufgezeichnet habe, habe ich die Dateien, welche die Kamera im .mov-Format abgespeichert hatte, durch die Java-Anwendung „convideo“ in das .avi-Format konvertiert, da measureDynamics, das Programm, welches ich zur Filmauswertung verwendet habe, die Dateien in ihrem Originalformat nicht zu öffnen vermochte. Hatte ich so brauchbare Filme zur Verfügung, habe ich diese in measureDynamics geöffnet, den Film geschnitten, die Koordinatenachsen und die Skala sowie die Bildrate festgelegt. Waren diese Einstellungen getätigt, konnte ich das Programm die Y-Koordinate jeder Masse auf jedem Einzelbild des Films ermitteln lassen. Diese Daten habe ich daraufhin in das Tabellenkalkulationsprogramm Excel übertragen, mithilfe dessen ich den Fehler in den Daten (beispielsweise durch Mittelwerte aus aufeinanderfolgenden Datenpunkten) verringern konnte.

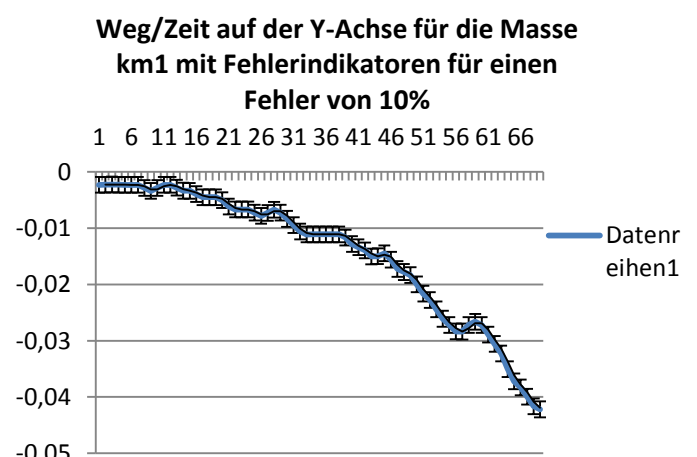
Ergebnisse:

Beobachtung: Das Diagramm weist bis auf den durch einen nicht reproduzierbaren Messfehler bedingten Knick gleichmäßige Kurven auf. Dabei ist die der Masse m_1 steiler und beginnt mit dem Beginn des Diagramms, abzufallen. Der untere Graph der Masse km_1 hingegen ist sehr flach; er beginnt erst, deutlich abzufallen, als der obere Graph fast schon 0,1 m zurückgelegt hat; doch dies tut er, bevor sich die Feder gänzlich zusammengezogen hat. Beide der Graphen wirken dabei wie flache Parabeln; denn die Strecke, welche beide der Gewichtsstücke zurücklegen, nimmt durch die ungleichmäßig beschleunigte Bewegung, deren Gesetzen die beobachtete Bewegung unterliegt, immer stärker zu. Dieser Unterschied zu der „gewöhnlichen“ Parabel einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung zeigt sich an dieser Stelle allerdings kaum, da die Einteilung des Geschehens in kleine Zeitabschnitte ebenfalls für einen nur kleinen Unterschied zwischen den einzelnen Beschleunigungen sorgt, da die für diesen verantwortliche in einem Δt zurückgelegte Strecke gleichermaßen klein ist. Zudem sorgt die Skalierung der Y-Achse dafür, dass der Graph der Masse km_1 auf einen so kleinen Bereich komprimiert ist, dass solche Details nicht mehr ersichtlich sind. Analysiert man diesen im Einzelnen, sollte die Einwirkung der ungleichmäßig beschleunigten Bewegung deutlicher zu erkennen sein.



Auswertung: Die Messwerte scheinen mit den Simulationsdaten größtenteils übereinzustimmen. Denn auch hier bleibt die untere Masse nicht in der Luft stehen, bis keine Federkraft mehr wirkt. Es beginnt schon in den ersten Abschnitten der für diesen Prozess benötigten Zeit, sich im Diagramm deutlich von der X-Achse zu lösen. Doch verneint das System damit das Slinky-Phänomen - oder handelt es sich auch bei dem aufgezeichneten Trend lediglich um einen von der Ungenauigkeit der Abbildungen hervorgerufenen Effekt? Um diese Frage zu klären, muss man sich mit den gemessenen Werten beschäftigen.

Betrachtet man das Diagramm der von der Masse km_1 auf der y-Achse zurückgelegten Strecke pro Zeitabschnitt, erkennt man, dass sich der Maßstab erheblich verändert hat. Denn haben vorher auf der Y-Achse der Darstellung 60 Zentimeter Platz gefunden, so werden nun nur noch sechs Zentimeter dargestellt, was zu einer erheblich



differenzierteren Darstellung der Daten führt. So sieht man, dass auch mit markiertem möglichen Fehler von 10 Prozent deutlich wird, dass die untere Masse keinesfalls stehen bleibt - sondern sich durch viele kleine Strecken immer weiter von null, der Ausgangskoordinate, entfernt. Des Weiteren wird die Annahme des Kräftemodells bestätigt, dass die Kräfte, die auf m_1 wirken, für eine Beschleunigung des Körpers sorgen, und dass diese Beschleunigungen mit dem Voranschreiten der Zeit zunehmen – bis die Beschleunigung der Masse m_1 schließlich der Erdbeschleunigung entspricht, da die der Gewichtskraft entgegenwirkende Spannkraft null beträgt. So ist nun gut zu erkennen, dass es sich bei dem Graphen des Massestücks um eine Parabel aus kleinen, unregelmäßig in ihrer Steigung zunehmenden linearen Abschnitten handelt, was bedeutet, dass sich die Geschwindigkeit des Massestücks durch eine ungleichmäßige, steigende Beschleunigung immer stärker verändert – und das sofort, nachdem das obere Massestück zu fallen begonnen hat ($n=1$).

Somit ist auch beim realen Phänomen, welches noch die Einwirkung nicht in der Simulation berücksichtigter Faktoren erlaubt, keine Slinky-Verhaltensweise messbar. Damit ist wahrscheinlich der in der Auswertung beschriebene Fall zwei eingetreten: Der „dritte Faktor“, welcher das Fallverhalten des Slinkys neben Federkraft und Gewichtskraft prägt, ist von den Eigenschaften des Slinkys wie der unregelmäßigen Massenverteilung abhängig oder besteht in den Auswirkungen dieser auf Feder- und Gewichtskraft.

Diese Überlegungen kann ich allerdings leider nur als Hypothesen einstufen, da mir der unbekannte Fehler des Programms `measureDynamics` nicht erlaubt, genaue Aussagen zu treffen. Geht man allerdings von einem Fehler zwischen 10 und 20 Prozent aus, so ist es äußerst wahrscheinlich, dass meine Aussagen zutreffen.

Daher besteht der nächste Schritt darin, nun mithilfe der Erkenntnisse aus dem Zwei-Körper-Problem auch beim Fall des Slinkys die Kräfte zu modellieren und somit darauf zu schließen, wovon die Besonderheit im Fallverhalten des Slinkys hervorgerufen wird.

Übertragung der Thesen auf das Slinky

Neben den Kräften muss es also einen weiteren Faktor geben, welcher dafür sorgt, dass die physikalischen Bedingungen für das „Slinky-Phänomen“ erfüllt sind. Doch wie genau sehen diese aus? Wie beim Zwei-Körper-System muss der Ablauf zunächst genau beobachtet werden, bevor auf die wirkenden Faktoren geschlossen werden kann. Daher habe ich auch den Fall des Slinkys in die Abschnitte „Anfang“, „Fall“ und „Ende“ aufgeteilt.

Anfang

Beobachtung: Innerhalb der Feder ist es zu einer Umverteilung der Ringe gekommen, die zu einer ungleichmäßigen Massendichte geführt hat. Sind die Ringe oben noch sehr stark ausgedehnt und somit weit voneinander entfernt, so nähert diese Ausdehnung und somit der Anstand der Ringe zum unteren Ende hin null an. Die Massendichte ist daher am unteren Ende größer als am oberen Ende.

Auswertung: Diese Umverteilung deutet auf die Gewichtskraft hin, welche auch hier gleichmäßig auf das gesamte System wirkt. Denn damit die Ringe nicht fallen und die Feder zur Ruhe kommt, muss der Gewichtskraft jedes Rings eine gleich große Gegenkraft entgegengesetzt werden. Diese besteht in der Federkraft der Windungen. So wird jeder Ring von der Gewichtskraft aller unter ihm liegenden Ringe ausgedehnt und sorgt so dafür, dass ein Kräftegleichgewicht herrscht. Lediglich der oberste Ring wird von keinem anderen Federbestandteil gehalten. Seine Gewichtskraft greift an der Halterung an.



Kräftemodellierung:

Für jedes Federglied außer dem obersten gilt:

$$F_{\text{ges}} = F_{\text{Sp}} \text{ (wirkt nach oben)} - F_{\text{G}} \text{ (wirkt nach unten)} = 0$$

Fall

Beobachtung: Beginnt das Slinky, zu fallen, so fällt es nicht als Ganzes, wie es eigentlich zu erwarten wäre. Während das obere Ende nach unten stürzt, bleiben alle anderen Ringe unbewegt, bis sie vom oberen Ende getroffen werden. So zieht sich die Feder Stück für Stück zusammen, sodass immer mehr der Ringe einen „Block“ formen, bis sich das Slinky schließlich ganz zusammengezogen hat.

Auswertung: Anders als bei der Feder des Zwei-Körper-Problems, deren Fall die Ausdehnung des gesamten Systems und somit die Größe der Federkraft verkleinert, scheint der Fall des obersten Rings und später der oberen Ringe die Federkraft, welche auf die unterhalb liegenden Ringe wirkt, nicht zu beeinflussen. Denn dass die Ringe trotz der Gewichtskraft unbewegt in der Luft stehen bleiben, bedeutet, dass eine nach oben gerichtete Gegenkraft wirkt – und diese liegt in der Federkraft. Woran liegt es also, dass eine Veränderung der Federkraft am oberen Ende der Feder das untere Ende nicht zu erreichen scheint, die Veränderung scheinbar nicht „übertragen“ wird? Wovon wird dieses Verhalten bestimmt?

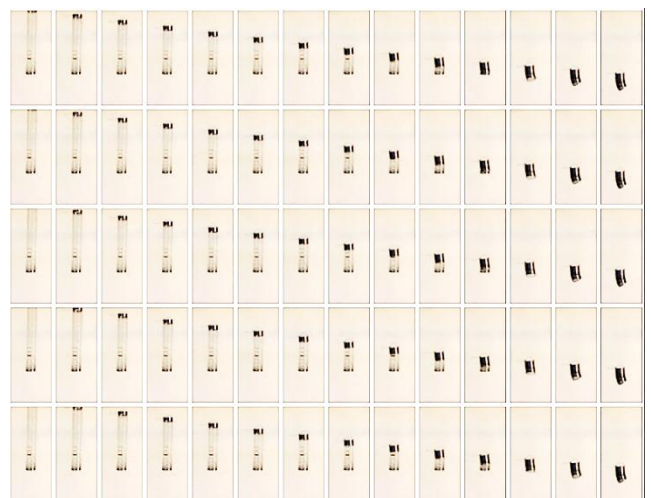


Abbildung 5: Stroboskopbild des fallenden Slinkys

Kraftmodellierung:

Für den Fall des Slinkys gilt:

Stehende Ringe: $F_{\text{ges}} = F_{\text{Sp}} - F_G = 0$

Fallende Ansammlung von Ringen:

$F_G < F_{\text{ges}} < F_G + F_{\text{Sp}}$ (erster Ring)

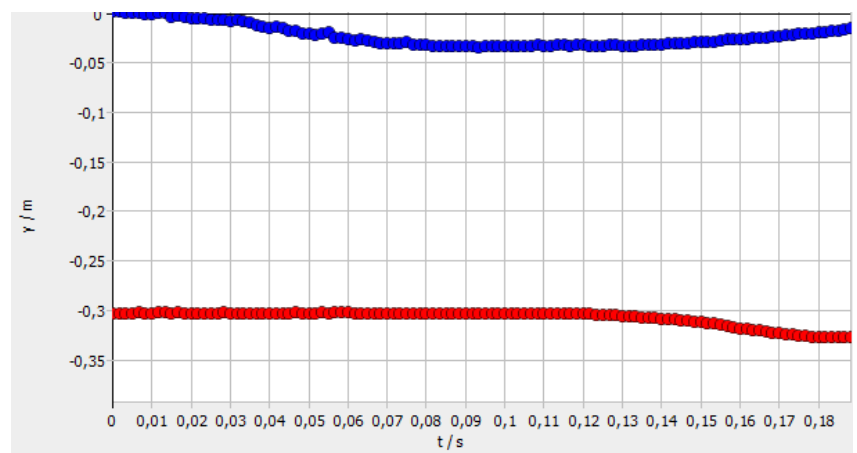
je weiter die Ringe gefallen sind, desto weniger groß ist die Kraft, welche sie beschleunigt.

Wie funktioniert die Veränderung der Federkraft?

Um die Federkraft zu verändern, welche auf alle Ringe wirkt, müsste die Ausdehnung aller Ringe, beginnend mit dem ersten Ring, geändert werden. Damit müssten alle Ringe nacheinander ihre Position verändern – ähnlich eines Wellenphänomens, einer Art Massenwelle, welche sich im Slinky ausbreitet. Diese müsste leicht beobachtet und gemessen werden können - denn die gute Beobachtbarkeit von Wellenphänomenen zählt zu den Eigenschaften des Slinkys. Ist diese Wellenübertragung bei den Slinkys deutlich, so resultiert aus den vorherigen Ergebnissen, dass diese Welle, um das Fallverhalten zu erklären, über eine so kleine Geschwindigkeit verfügen muss, dass sie erst nach dem fallenden obersten Ring auf die anderen Windungen des Slinkys treffen könnte. Diese erfahren somit keine Kraftänderung, bis der von oben fallende „Block“ sie einholt - und bleiben damit währenddessen in der Luft stehen. Das Verhalten des Slinkys zeigt das charakteristische Phänomen auf.

Um diese Hypothese zu überprüfen, muss ich eine dieser Wellen aufzeichnen und auswerten. Zur Durchführung dieses Versuchs spanne ich ein Slinky zwischen zwei an einer senkrecht stehenden Stange befestigten Klemmen und vergrößere den Abstand zwischen diesen über die Eigenlänge der Feder hinaus. Daraufhin befestige ich in regelmäßigen Abständen Markierungen am Slinky und lenke während der Aufnahme eine dieser Markierungen nach unten hin aus, sodass sich der Abstand zwischen den darunter liegenden Federringen ähnlich wie bei der Abnahme der Spannkraft vermindert.

Beobachtung: Da das Experiment senkrecht zur Erdoberfläche stattfindet, fallen die Federringe, auf welche nun nicht mehr genug Federkraft wirkt, um die Gewichtskraft zu kompensieren, etwas, bis ihre Ausdehnung wieder für $F_{\text{Sp}} = F_G$ sorgt. Dadurch allerdings werden die unter ihnen befindlichen Ringe zusammengedrückt, welche den Prozess wiederholen: so werden alle Ringe nacheinander nach unten ausgelenkt, da die Auslenkung der ersten Spule durch die Befestigung der



Ringe aneinander die Verdichtung und Ausdehnung der anderen Ringe nach sich zieht. Diese „Bewegungswelle“ breitet sich nun in Richtung der anderen Markierungen aus.

Auswertung: Dies ist hier mithilfe eines Diagramms der Y-Koordinaten der beiden Markierungen dargestellt: Wird die obere Markierung (blauer Graph) schon bei $t = 0,03$ s ausgelenkt, so kommt diese Bewegung erst nach

0,11 s ($t = 0,14$ s) bei der unteren Markierung an. Für die zwischen ihnen liegende Strecke von 0,303 m hat die Welle also 0,11s benötigt, was einer Geschwindigkeit von ca. 2,75 m/s entspricht.

These: Änderungen der Federkraft werden über eine „Ausdehnungswelle“ der einzelnen Federringe übertragen, welche beim Slinky ausgeprägt und deutlich messbar ist. Diese Welle würde beim Fall des Slinkys normalerweise dafür sorgen, dass die Verkleinerung der Federkraft, hervorgerufen durch den Fall der obersten Windung, innerhalb von Sekundenbruchteilen auf alle Federringe wirkt und die Gewichtskraft über die Federkraft überwiegen lässt. Doch da der obere Teil der Feder von einer so großen Kraft beschleunigt wird, dass er schneller als diese Welle fällt, trifft er auf die unteren Ringe, während diese noch in der Luft stehen - da die Veränderung der Federkraft sie nicht erreicht hat. Dadurch kommt das Slinky-Phänomen zustande. Damit das Slinky-Phänomen stattfindet, muss nach der Hypothese die Fallgeschwindigkeit des oberen Endes zu jeder Zeit größer sein als die Wellengeschwindigkeit in der Feder.

Experimentelle Überprüfung des Modells

Überlegung: Um das Modell zum Slinky-Phänomen zu belegen, muss man die entscheidenden Faktoren während des Versuchs messen. Bei diesen handelt es sich hierbei um die Wellengeschwindigkeit in der Feder und der Fallgeschwindigkeit des oberen Endes. Wäre meine Überlegung zutreffend, so müsste das obere Ende zu allen Zeiten schneller als eine durch das Slinky laufende Welle sein.

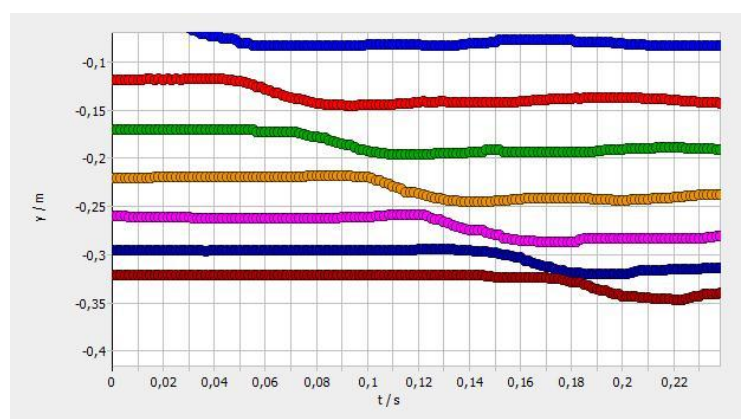
Messung der Wellengeschwindigkeit im Slinky

Durchführung: Dabei muss beachtet werden, dass sich das Slinky, anders als das Zwei-Körper-Problem, nicht einfach auf ein „fallendes Koordinatensystem“ übertragen lässt. Denn spannt man ein Slinky waagrecht zum Erdboden in ein Stativ ein und lässt eine Welle durch die gespannte Feder laufen, so wird die Welle nicht die gleichen Geschwindigkeiten wie die in dem fallenden Slinky besitzen, was durch die unregelmäßige Massenverteilung in der Feder erklärt werden kann. Diese muss so auch in dem eingespannten Slinky herrschen. Deswegen spanne ich das Slinky orthogonal zur Erdoberfläche so ein, dass es sowohl über zwei feste Enden als auch über die unregelmäßige Massendichte verfügt. Und da sich die Wellengeschwindigkeit ja mit dieser verändert, teile ich das Slinky in Bereiche verschiedener Dichte und bringe dort Markierungen an. Nun wird die oberste Markierung ausgelenkt und die Y-Koordinaten aller Markierungen gemessen, während die Welle durch die Feder wandert. Überträgt man diese in ein Diagramm, so ergibt sich Folgendes:



Auswertung des Diagramms:

Aufgrund der Lage der X- und Y-Achse ist eine Verschiebung der Markierung durch die Welle als Abfallen des entsprechenden Positionsgraphen nach unten sichtbar. Diese Veränderung scheint sich relativ gleichmäßig durch die Feder auszubreiten; ins Auge sticht lediglich, dass zwischen dem Abfallen der

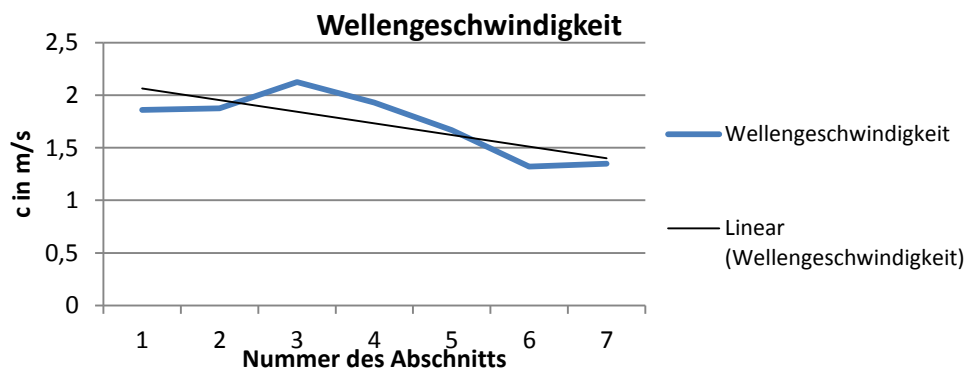


unteren Graphen ein kleinerer zeitlicher Unterschied als zwischen dem der oberen Graphen zu bestehen scheint. Dies ist dadurch zu erklären, dass, mag auch die Wellengeschwindigkeit aufgrund einer immer kleineren Zugspannung und einer immer größeren Massendichte abnehmen, die Wege, die die Welle zwischen den Markierungen zurücklegen muss, immer kleiner werden, und zwar schneller, als die Wellengeschwindigkeit abnimmt. Das kommt dadurch zustande, dass unter den unteren Ringen des Slinkys weniger weitere Ringe zu finden sind, deren Gewichtskraft an den Windungen angreift. Dadurch werden diese weniger stark ausgedehnt,

weswegen eine Strecke, die acht der Ringe enthält, hier kürzer ist als weiter zum oberen Ende des Slinkys hin. Bestimmt man die Wellengeschwindigkeit in den Zonen zwischen den einzelnen Markierungen, um sie später mit der Fallgeschwindigkeit des Federendes zu vergleichen, so teilt man den Abstand zwischen den Markierungen durch die Zeit, welche die Welle benötigt hat, um diesen laut Diagramm zu überwinden. Dabei nehme ich 0,005 m, 5 mm, als Messfehler des Programms an; das Ankommen der Welle an einer Markierung wird also dadurch definiert, dass sich diese um über 0,005 m bewegt. So ergibt sich:

Abschnitt	Strecke/m	Zeit/s	Wellengeschwindigkeit/ m/s
Auslöser der Welle bis Markierung 1	0,049	Messung 1: 0,0260 Messung 2: 0,0267	1: 1,88 2: 1,84 Arithmetisches Mittel: 1,86
Markierung 1 – Markierung 2	0,058	1: 0,034 2: 0,0283	1: 1,7 2: 2,05 A.M.: 1,875
Markierung 2 – Markierung 3	0,051	1: 0,03 2: 0,02	1: 1,7 2: 2,55 A.M.: 2,125
Markierung 3 – Markierung 4	0,045	1: 0,0183 2: 0,0317	1: 2,45 2: 1,41 A.M.: 1,93
Markierung 4 – Markierung 5	0,039	1: - 2: 0,0233	1: - 2: 1,67
Markierung 5 – Markierung 6	0,033	1: - 2: 0,025	1: - 2: 1,32
Markierung 6 – Markierung 7	0,027	1: - 2: 0,02	1: - 2: 1,35

Stellt man die Werte der Wellengeschwindigkeiten in einem Diagramm dar, so erhält man folgendes:

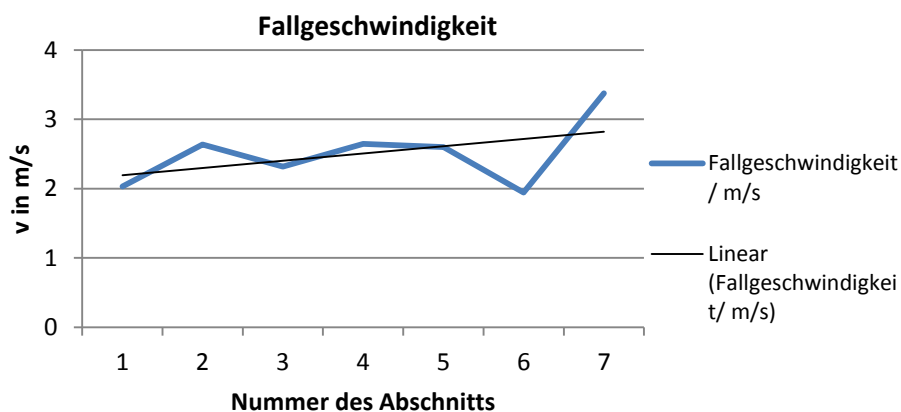


Die Trendlinie des Graphen zeigt eine deutliche Abnahme der Wellengeschwindigkeit, sie wird gemäß der Hypothese mit der Zeit kleiner.

Messung der Fallgeschwindigkeit des oberen Slinkyendes

Um die Fallgeschwindigkeit des oberen Endes zu bestimmen, wiederholt man das Experiment auf ähnliche Weise. Der Unterschied besteht darin, dass das Slinky nicht eingespannt als Träger einer Welle dient, sondern, dass es von der Halterung gelöst und fallen gelassen wird. Nimmt man den Fall auf, kann man auf dieselbe Weise wie zuvor die Fallgeschwindigkeit des Rings zwischen den Markierungen bestimmen.

Abschnitt	Strecke/m	Zeit/s	Wellengeschwindigkeit/ m/s	Fallgeschwindigkeit/ Strecke/Zeit = m/s
Auslöser der Welle bis Markierung 1	0,049	Messung 1: 0,0260 Messung 2: 0,0267	1: 1,88 2: 1,84 Arithmetisches Mittel: 1,86	$0,065/0,032 = 2,03125$
Markierung 1 – Markierung 2	0,058	1: 0,034 2: 0,0283	1: 1,7 2: 2,05 A.M.: 1,875	$0,058/0,022 = 2,63636364$
Markierung 2 – Markierung 3	0,051	1: 0,03 2: 0,02	1: 1,7 2: 2,55 A.M.: 2,125	$0,051/0,022 = 2,31818182$
Markierung 3 – Markierung 4	0,045	1: 0,0183 2: 0,0317	1: 2,45 2: 1,41 A.M.: 1,93	$0,045/0,017 = 2,64705882$
Markierung 4 – Markierung 5	0,039	1: - 2: 0,0233	1: - 2: 1,67	$0,039/0,015 = 2,6$
Markierung 5 – Markierung 6	0,033	1: - 2: 0,025	1: - 2: 1,32	$0,033/0,017 = 1,94117647$
Markierung 6 – Markierung 7	0,027	1: - 2: 0,02	1: - 2: 1,35	$0,027/0,008 = 3,375$



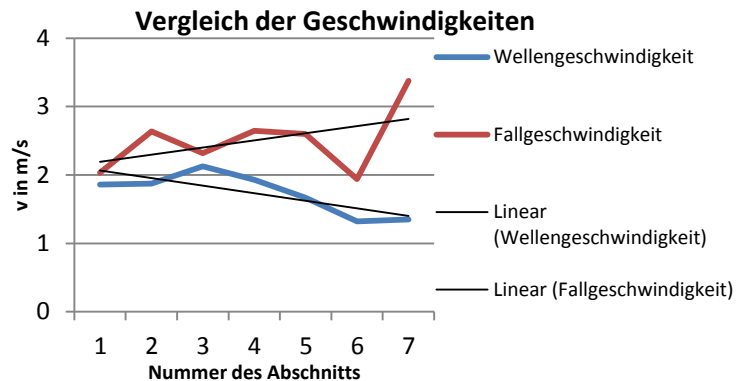
Hier zeigt sich in der Trendlinie ein kontinuierlicher Anstieg der Werte. Mag die Beschleunigung aufgrund der kleiner werdenden Federkraft auch abnehmen, steigert sich die Strecke, in die auch die vorherigen Endgeschwindigkeiten miteinbezogen werden (→ siehe „Die mathematische Modellierung des Zwei-Körper-Problems“). Somit erscheint auch die Fallgeschwindigkeit größer.

Vergleich der Geschwindigkeiten

Doch erst der Vergleich der beiden Kurven kann Aufschluss über die Eignung der Hypothese zum Slinky-Phänomen geben:

Und dieser zeigt, dass die Fallgeschwindigkeit des oberen Endes tatsächlich stets höher als die Wellengeschwindigkeit im Slinky ist. Dabei ist entscheidend, dass der eine Wert durch eine sich verändernde Beschleunigung hervorgerufen wird und somit auch, wenn die Beschleunigung einen kleineren Wert annimmt, größer wird. Die Wellengeschwindigkeit im Slinky hingegen verfügt über keine oder aufgrund der langfristig abnehmenden Geschwindigkeit negative Beschleunigung. Dies führt dazu, dass sich die beiden Werte, lagen sie anfangs auch nahe aneinander, in gegensätzliche Richtungen entwickeln. Und somit die physikalische Voraussetzung für das Phänomen liefern.

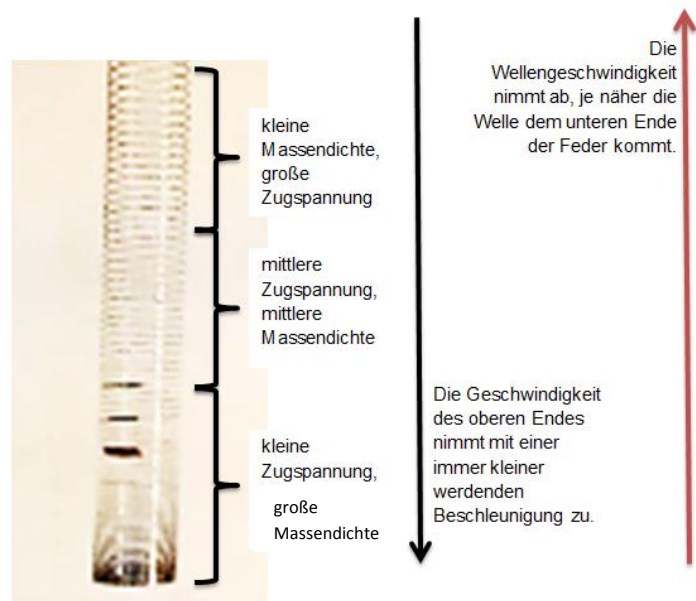
Somit konnte die Hypothese, die sich auf gerade dieses Verhältnis von Fallgeschwindigkeit der obersten Slinkywindung und Wellengeschwindigkeit im Slinky bezieht, belegt werden. Daher stellt sie wahrscheinlich ein geeignetes Erklärungsmodell dar.



Physikalische Betrachtungen zur Wellengeschwindigkeit in Federn

Diese Erklärung macht das Verhältnis von Wellengeschwindigkeit und Beschleunigung aus Federkraft und Gewichtskraft zu einem ungemein wichtigen Aspekt in Zusammenhang mit dem Fallverhalten der Slinky-Feder. Doch wodurch wird die Wellengeschwindigkeit in einer Feder bestimmt? Der gefragte Zusammenhang ist in Formelsammlungen zumeist als $c = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$ aufgeführt. Dabei bezeichnet τ die sogenannte „Zugspannung“, die Federkraft, welche innerhalb des Systems wirkt, während μ für die Massendichte steht. Damit ist das Quadrat der Wellengeschwindigkeit proportional zur Zugspannung und antiproportional zur Massendichte - je dichter die Ringe einer Feder als Hauptmassenträger also aneinander gelegen sind, desto niedriger ist daher die Wellengeschwindigkeit. Somit begünstigt die Struktur des hängenden Slinkys das auftretende Phänomen: je mehr Zeit vergeht, je näher das fallende obere Ende und die Welle dem unteren Ende also gekommen sind, desto höher wird die Geschwindigkeit des fallenden Endes und desto kleiner wird die Wellengeschwindigkeit. Denn die Zugspannung nimmt ebenfalls ab – so ist die Massendichte gerade deswegen hoch, da die Ausdehnung der Federringe und somit τ klein ist. Die beiden Größen stehen in einem Je-mehr-desto-weniger-Verhältnis zueinander. Doch welche anderen Eigenschaften des Slinkys beeinflussen das Phänomen? Da die Zugspannung der Federkraft innerhalb der Feder entspricht, so lässt sich diese ebenfalls mit $\tau = Dx$ ausdrücken. μ hingegen ist die Masse des Slinkys geteilt durch seine Strecke: $\mu = \frac{m}{l}$. Setzt man diese Gleichungen in die Ausgangsformel ein, so ergibt sich: $c = \sqrt{\frac{Dxl}{m}}$. Damit lässt sich festmachen, welche Merkmale des Slinkys die Höhe der Wellengeschwindigkeit und somit auch das untersuchte Phänomen beeinflussen: die Federkonstante, die Ausdehnung und die Länge der Feder sind proportional zu dem Quadrat der Wellengeschwindigkeit, während die Masse des Slinkys sich als antiproportional erweist. Somit müssen, um das Phänomen zu begünstigen, D , x und l möglichst klein sein, während m möglichst groß sein sollte.

Und tatsächlich: Das Slinky unterscheidet sich von Federn vor allem durch seine kleine Federkonstante und große Masse. Und diese Größen sorgen dafür, dass die Zugspannung klein und die Massendichte groß bleiben - beziehungsweise zunehmend kleiner und größer werden, je weiter das Phänomen voranschreitet, was durch die gleichmäßige Einwirkung der Gravitationskraft bedingt ist. So kann es sein, dass durch die konstante Geschwindigkeit zunächst größere Strecken zurückgelegt werden – die Welle also kurz vor dem oberen Ende auf die anderen Ringe trifft. Doch da, selbst bei etwas kleiner werdender Beschleunigung, die Geschwindigkeit des fallenden Endes immer größer und die Wellengeschwindigkeit durch die zunehmende Massendichte immer kleiner werden, wird die Welle in solchen Fällen zumeist in der Mitte des Slinkys überholt.



Bei der Feder des Zwei-Körper-Problems hingegen war dies nicht der Fall. Denn aufgrund einer hohen Federkonstante, eines geringen Gewichts und einer großen Eigenlänge war die Geschwindigkeit in der Feder sehr hoch; kurz, bevor sich die Feder gänzlich zusammengezogen hat, hat sie das Federende erreicht und dafür gesorgt, dass es anfängt, zu fallen.

Die zunehmende Massendichte im Slinky, welche wiederum auf die hohe Masse und die kleine Federkonstante in der Feder zurückzuführen ist, erklärt also die Abnahme der Wellengeschwindigkeit. Diese ist ein Schlüsselfaktor im Slinkyphänomen und zeigt sich ebenfalls in der Messung der Wellen- und Fallgeschwindigkeit beim Fall eines Slinkys. Um meine Argumentation zu belegen, ist es wichtig, die verwendete Formel $c = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$ durch eine Beispielrechnung zu überprüfen.

So habe ich die Wellengeschwindigkeit in einem Slinky errechnet, dessen Zugspannung und Massendichte ich ermittelt habe, und sie mit den gemessenen Werten verglichen. Diese habe ich für ein Slinky schon im Rahmen der Wellen-Beispielmessung erhoben (S. 13). Für die Errechnung der Geschwindigkeit ergibt sich:

Gegeben: $D = 0,95 \text{ N/m}$, $x = 0,29 \text{ m}$, $l = 0,303 \text{ m}$, $m = 0,0099 \text{ kg}$

Gesucht: $c = \sqrt{\frac{Dxl}{m}}$

Rechnung: $c = \sqrt{\frac{0,29 \text{ m} \cdot 0,303 \text{ m} \cdot 0,95 \text{ N/m}}{0,0099 \text{ kg}}}$

$c = 2,9 \text{ m/s}$

Da dieser Wert mit dem Messwert (2,75, siehe Text zu Diagramm S. 13) zu knapp 94% übereinstimmt, hat sich die Formel bestätigt.

Modellierung: wie ist das Phänomen mathematisch bedingt?

Sind diese und die Erklärungshypothese als Ansatz gegeben, gegeben, so kann man die Bedingungen des Slinky-Phänomens auch mathematisch ausdrücken. Denn dass die Fallgeschwindigkeit schon zu Anfang des Phänomens größer oder gleich der Wellengeschwindigkeit sein muss, bedeutet, dass der Quotient aus beiden Größen größer oder gleich 1 sein muss. Ist die Definition der Wellengeschwindigkeit, reduziert auf an einer Feder messbaren Größen wie D oder x , gegeben, so muss nur noch eine Gleichung für die Fallgeschwindigkeit der Feder gefunden werden. Dabei vereinfacht die Überlegung, dass das Slinkyphänomen nicht nur dadurch definiert wird, dass das untere Ende der Feder unbewegt verweilt, bis es vom oberen Ende erreicht wird und bis $l=h$ gilt, sondern, dass an allen Windungen des Slinkys ein Kräftegleichgewicht herrscht, bis der Zustand des oberen Endes durch den Aufprall auf sie übertragen wird. Daher muss die angenommene Bedingung schon im ersten Modell-Zeitabschnitt gelten, in welchem von einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung auf Grundlage der Ausgangsgrößen ausgegangen wird. In der Praxis bedeutet dies, dass die für einen Teil der Bedingung benötigten Größen direkt am hängenden Slinky ermittelt werden können und nicht erst durch eine Simulation errechnet werden müssen. Diese können auch für den zweiten Teil der Bedingung, die Fallgeschwindigkeit, verwendet werden.

Zunächst müssen auf ihrer Grundlage die wirkenden Beschleunigungen errechnet werden. Diese setzen sich aus der Beschleunigung durch die Federkraft und der Erdbeschleunigung zusammen:

$$a_{Fall} = \frac{Dx}{m_{Ende}} + g$$

Um die Fallgeschwindigkeit zu ermitteln, muss die Gleichung nur noch in die Geschwindigkeitsgleichung für beschleunigte Bewegungen eingesetzt werden:

$$v_{Fall} = a * \Delta t \quad | a_{Fall} = \frac{Dx}{m_{Ende}} + g$$

$$v_{Fall} = \left(\frac{Dx}{m_{Ende}} + g \right) * \Delta t$$

Nun wird v_{Fall} durch v_{Welle} geteilt, um den für das Phänomen ausschlaggebenden Quotienten zu ermitteln:

$$\frac{\left(\left(\frac{Dx}{m_{Ende}} + g \right) * \Delta t \right) * \sqrt{m_{Feder}}}{\sqrt{Dxl}} = Q$$

Ist Q größer oder gleich 1, so verhält sich eine Feder gleich dem Slinky:

$$\frac{\left(\left(\frac{Dx}{m_{Ende}} + g \right) * \Delta t \right) * \sqrt{m_{Feder}}}{\sqrt{Dxl}} \geq 1$$

Ist der Quotient kleiner als eins, so kann das „vollständige“ Phänomen nicht stattfinden; es ist höchstens möglich, dass das Federende die Welle in der Mitte der Feder überholt und den Anschein des speziellen Verhaltens erweckt.

$$\frac{\left(\left(\frac{Dx}{m_{Ende}} + g \right) * \Delta t \right) * \sqrt{m_{Feder}}}{\sqrt{Dxl}} < 1$$

Die mathematische Vermutung ist allerdings noch keine wissenschaftliche Hypothese, wurde sie nicht durch ein paar beispielhafte Rechnungen belegt. Auch hier ist es nötig, die Werte eines Slinkys, in welchem das Phänomen stattfindet, und die Werte einer Feder wie der Feder des Zwei-Körper-Systems, welche kein besonderes Fallverhalten aufzeigt, in die Formel einzusetzen und zu überprüfen, ob die Vorhersagen mit den früheren Beobachtungen übereinstimmen. Ist die Gleichung realitätsgemäß, so müsste der Quotient der Geschwindigkeiten bei dem Slinky, das auch für die Messungen des Verhältnisses verwendet wurde, über 1 liegen, während der Quotient der Werte der Feder des Zwei-Körper-Systems unter 1 sein sollte.

Überprüfung

Slinky:

$$\frac{\left(\left(\frac{0,4 \frac{N}{m} * 0,77m}{0,000274 kg} + 9,81 \frac{m}{s^2} \right) * \frac{1}{600} s \right) * \sqrt{0,026 kg}}{\sqrt{0,4 \frac{N}{m} * 0,77m * 0,805m}} = 1,23$$

Da der Quotient größer als 1 ist, sagt die Formel voraus, dass das Slinkyphänomen in der Feder stattfindet. Dies stimmt mit der anfänglichen Beobachtung und dem Vergleich der Messungen von Wellen- und Fallgeschwindigkeit überein.

Feder der Zwei-Körper-Systems:

$$\frac{\left(\left(\frac{20,22 \frac{N}{m} * 0,097m}{0,1 kg} + 9,81 \frac{m}{s^2} \right) * \frac{1}{600} s \right) * \sqrt{0,01 kg}}{\sqrt{20,22 \frac{N}{m} * 0,097 m * 0,368}} = 0,0058$$

Hier verneint der Quotient mit seinem Wert unter 1 deutlich das Phänomen. Er sagt somit dasselbe voraus, was auch die Messungen und die Simulation zum Zwei-Körper-System gezeigt haben. Daher konnte die Formel noch einmal belegt werden. Und damit die Erklärungshypothese zum Slinky-Phänomen.

Ausblick

Gerade aufgrund seiner Eigenschaften wie der kleinen Federkonstante, welche das Phänomen prägen, ist das Slinky bekannt geworden. Denn Wellen mit nur kleiner Wellengeschwindigkeit lassen sich gut mit dem bloßen Auge beobachten. Zudem sorgen gerade bei mehrfarbigen Slinkys Verdichtungswellen, die die Farben einzeln heraustreten lassen, für ein eindrucksvolles Schauspiel. Dieses Interesse der Öffentlichkeit an den Slinkys führte schließlich auch dazu, dass die Raumfähre „Discovery“ die Feder 1985 mit ins Weltall nahm. Doch die Astronauten konnten nichts Auffälliges an der Feder beobachten, so schreibt Professor Wolfgang Bürger in seinem Buch „Der paradoxe Eierkocher“ (Birkhäuser Verlag, Erscheinungsdatum nicht bekannt). Auch dies wird durch mein Modell erklärt: denn wirkt unter „zero gravity“ keine Gewichtskraft auf das Slinky, so muss keine Gegenkraft die Ringe in die entgegengesetzte Richtung beschleunigen. Das Slinky dehnt sich nicht einmal aus. „Und die Ruheformen des Slinkys“ so Prof. Bürger, „sind aber bekannt, so die „Elastica“, die Leonhard Euler schon 1744 studierte“.

Nicht nur Physiker aus dem Gebiet der Mechanik, Mathematiker und die Medien haben sich schon mit dem Slinky beschäftigt. Es besteht auch eine materialwissenschaftliche Annäherung an die „Treppenspirale“: denn die Federsteifigkeit (die Kraft, welche man benötigt, um eine Feder auf ihre doppelte Länge auszudehnen), wird von der Form des Drahtquerschnitts beeinflusst. Stellt man ein Slinky aus Draht mit rechteckigem Querschnitt statt mit rundem Querschnitt her, kann man diese und somit die Federkonstante D auf ein Bruchteil reduzieren (ebenfalls aus „Der paradoxe Eierkocher“). Überträgt man diese Erkenntnis auf die letzte mathematische Betrachtung ($c = \sqrt{\frac{Dxl}{m}}$), so wird schnell klar, dass die Beschaffenheit der Ringe tatsächlich ein großer Teil davon sein könnte, was das Slinky von normalen Federn unterscheidet. Denn haben die beiden Systeme die gleiche Masse, die gleiche Länge, den gleichen Spulenradius und die gleiche Ausdehnung, so variiert alleine die Form des Drahts die Federkonstante und dadurch die Wellengeschwindigkeit und das Fallverhalten des Slinkys.

Denkt man zunächst, das Verhalten des Slinkys sei leicht zu erklären, so wird später deutlich, dass es vor allem auf physikalisch-mathematischer Ebene Potential für ein anspruchsvolles Problem hat. Doch zu allen den theoretischen Betrachtungen, welche ich im Laufe dieser Arbeit angestellt habe, gehören natürlich auch belegende Messungen. Diese sind bieten noch Erweiterungsmöglichkeiten. Zudem ergeben sich weitere Fragen: Von welchen Größen hängt die Dauer des Phänomens ab? Und inwiefern wird der Fall des Zwei-Körper-Systems von dem Massenverhältnis k beeinflusst?

Nicht zuletzt ist das Slinky und die Erforschung desselben ein gutes Beispiel für die Vorgehensweise der Wissenschaft, welche hier durch Modelle theoretischer und praktischer Art zu einer allgemeinen Aussage über Wellen in Federsystemen führt. Welche wiederum die Tür für andere faszinierende Probleme öffnet.

Quellen:

- Prof. Wolfgang Bürger: „Der paradoxe Eierkocher. Physikalische Spielereien aus Professor Bürgers Kabinett“ (Birkhäuser Verlag, Erscheinungsdatum unbekannt): lediglich im Text als solches gekennzeichnetes Zitat.

Programme und sonstiges Material:

- Programm zur Filmauswertung:
„measureDynamics“, PHYWE Software.
- Java-Anwendung zum Ändern von Dateiformaten:
„convideo“
- Kamera, mit welcher die Slow-Motion-Aufnahmen entstanden sind:
Casio Exilim F1